

MATEMÁTICAS

David VALENCIA RICARTE

PROPUESTA DE RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS EN CUARTO CURSO
DE PRIMARIA

TFG 2019/20

Grado en Maestro en Educación Primaria
Lehen Hezkuntzako Irakasleen Gradua

Trabajo Fin de Grado
Gradu Bukaerako Lana

***PROPUESTA DE RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS EN CUARTO CURSO DE
PRIMARIA***

David VALENCIA RICARTE

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS Y SOCIALES
GIZA ETA GIZARTE ZIENTZIEN FAKULTATEA

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Estudiante / Ikaslea

David VALENCIA RICARTE

Título / Izenburua

Propuesta de resolución de problemas en cuarto curso de primaria

Grado / Gradu

Grado en Maestro en Educación Primaria / Lehen Hezkuntzako Irakasleen
Gradua

Centro / Ikastegia

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales / Giza eta Gizarte Zientzien
Fakultatea
Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Director-a / Zuzendaria

Inmaculada LIZASOAIN IRISO

Departamento / Saila

Departamento de Matemáticas

Curso académico / Ikasturte akademikoa

2019/2020

Semestre / Seihilekoa

Primavera / Udaberria

Preámbulo

El Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, modificado por el Real Decreto 861/2010, establece en el Capítulo III, dedicado a las enseñanzas oficiales de Grado, que “estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa de un Trabajo Fin de Grado [...] El Trabajo Fin de Grado tendrá entre 6 y 30 créditos, deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título”.

El Grado en Maestro en Educación Primaria por la Universidad Pública de Navarra tiene una extensión de 12 ECTS, según la memoria del título verificada por la ANECA. El título está regido por la *Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria*; con la aplicación, con carácter subsidiario, del reglamento de Trabajos Fin de Grado, aprobado por el Consejo de Gobierno de la Universidad el 12 de marzo de 2013.

Todos los planes de estudios de Maestro en Educación Primaria se estructuran, según la Orden ECI/3857/2007, en tres grandes módulos: uno, *de formación básica*, donde se desarrollan los contenidos socio-psico-pedagógicos; otro, *didáctico y disciplinar*, que recoge los contenidos de las disciplinas y su didáctica; y, por último, *Practicum*, donde se describen las competencias que tendrán que adquirir los estudiantes del Grado en las prácticas escolares. En este último módulo, se enmarca el Trabajo Fin de Grado, que debe reflejar la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas. Finalmente, dado que la Orden ECI/3857/2007 no concreta la distribución de los 240 ECTS necesarios para la obtención del Grado, las universidades tienen la facultad de determinar un número de créditos, estableciendo, en general, asignaturas de carácter optativo.

Así, en cumplimiento de la Orden ECI/3857/2007, es requisito necesario que en el Trabajo Fin de Grado el estudiante demuestre competencias relativas a los módulos de formación básica, didáctico-disciplinar y practicum, exigidas para

todos los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria.

En este trabajo, el módulo *de formación básica* se desarrolla en el apartado de “marco teórico”, en donde se incluye la fundamentación psicopedagógica y las teorías constructivistas y de aprendizaje de autores de reconocida difusión como son Piaget o Vygotsky entre otros, los cuales han realizado grandes aportes a la educación. Por ello, podemos considerar que este módulo de formación básica es la base del trabajo, ya que sin ella no se podría desarrollar la propuesta que se presenta en este trabajo.

El módulo *didáctico y disciplinar* se concreta en el apartado de “marco teórico” y en el de “clasificación y metodología”. Este módulo permite trabajar la resolución de problemas dentro del área de las matemáticas, estudiada por autores de renombre como Pólya entre otros, que proponen unos pasos a seguir, así como los tipos de problemas que nos podemos encontrar. Además, se realiza un pequeño recorrido histórico de las matemáticas dentro de las leyes educativas.

Asimismo, el módulo *practicum* se desarrolla en el apartado de “propuesta de intervención”, en la que se propone un taller de resolución de problemas compuesto por cinco sesiones, donde también se especifica el contexto en el que se pretende desarrollar y la metodología que convendría usar para ello.

Resumen

El área de matemáticas se orienta hacia el desarrollo de las capacidades y habilidades instrumentales, que aumentan y perfeccionan las posibilidades de conocimiento de los alumnos. La resolución de problemas es una parte central de todo el aprendizaje matemático, es decir, el eje en torno al cual han de girar los contenidos trabajados en dicha área.

A lo largo de este trabajo, se analizan las diferentes concepciones, estrategias y procesos de resolución de problemas con la finalidad de poder generar hábitos de razonamiento, constancia y curiosidad en el alumnado. Para ello, se presenta una propuesta de intervención en la que se trabajan diferentes tipos de problemas poniendo en práctica estrategias para los procesos resolutivos, utilizando además metodologías que fomentan la participación y motivación del estudiante, como es el aprendizaje cooperativo en pequeños grupos.

Palabras clave: matemáticas; problemas; procesos resolutivos; estrategias; aprendizaje cooperativo.

Abstract

The area of mathematics is oriented towards the development of instrumental skills and abilities, which increase and perfect the possibilities of knowledge of students. Problem solving is a central part of all mathematical learning, that is, the axis around which the contents worked in that area must rotate.

Throughout this work, the different conceptions, strategies and problem-solving processes are analyzed in order to generate habits of reasoning, constancy and curiosity in students. To this end, an intervention proposal is presented in which different types of problems are worked by implementing strategies for resolution processes, also using methodologies that encourage student participation and motivation, such as cooperative learning in small groups.

Keywords: mathematics; problem; resolving processes; strategies; cooperative learning.

Índice

Introducción

1. Justificación, objetivos y cuestiones	1
1.1. Justificación	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo general	2
1.2.2. Objetivos específicos	2
1.3. Cuestiones	2
2. Marco teórico	3
2.1. Normativa legal	3
2.2. Fundamentación Psicopedagógica	6
2.3. Concepto Resolución de Problemas	10
2.3.1. Definición	10
2.3.2. Diferencia entre Ejercicio y Problema	10
2.3.3. Diferentes Concepciones	12
2.4. Modelos de Resolución de Problemas	13
2.4.1. Modelo Muller y Jungk	14
2.4.2. Modelo Schoenfeld	14
2.4.3. Modelo Krulik y Rudnick	14
2.4.4. Modelo Wallas	14
2.4.5. Modelo Andre y Hayes	15
2.4.6. Modelo Pólya	15
2.5. Estrategias de Resolución de Problemas	18
2.6. Tipos de problemas a trabajar en Educación Primaria	24
2.7. Aprendizaje cooperativo	26
3. Clasificación y metodología	29
3.1. Clasificación	30
3.1.1. Clasificación de los problemas de sumas y restas	30
3.1.2. Clasificación de problemas multiplicativos	31
3.2. Metodología	33

4. Propuesta de intervención	37
4.1. Situación inicial	37
4.2. Desarrollo temporal de las sesiones	37
4.3. Dinámica del aula	38
4.4. Recursos materiales	38
4.5. Marco curricular	39
4.6. Sesiones del taller	40
4.6.1. Sesión 1	40
4.6.2. Sesión 2	41
4.6.3. Sesión 3	45
4.6.4. Sesión 4	47
4.6.5. Sesión 5	47
Conclusiones y cuestiones abiertas	49
Referencias	53
Anexos	54
Anexo I	54
Anexo II	56
Anexo III	58
Anexo IV	60

INTRODUCCIÓN

En todos los ámbitos de la vida cotidiana la resolución de problemas es algo primordial y fundamental que debemos enseñar a los alumnos, en conjunto con las competencias matemáticas que requieren la realización de operaciones elementales de cálculo, el lenguaje algebraico, la medida, la geometría, la estadística y la probabilidad, como indica el currículo de las enseñanzas de educación primaria.

En el desarrollo del aprendizaje matemático en el niño, desempeñan un papel importante la experiencia y la inducción. Por ello es importante que las experiencias matemáticas sean intuitivas y vinculadas a la manipulación de objetos concretos, procurando además, ofrecer situaciones a los niños que tengan sentido para ellos y en las que puedan experimentar. Lo que se pretende en este trabajo es observar y llegar a determinar si los alumnos son capaces de resolver los problemas de forma competente. Es necesario identificar los errores más comunes que se cometen, para tratar de corregirlos. Es fundamental, en un primer paso, la comprensión del enunciado, íntimamente relacionada con la competencia lingüística, para lo cual es necesario ir trabajando la comprensión y expresión oral y escrita.

El objetivo que se busca en la resolución de problemas no es aprender los algoritmos, sino saber para qué, cómo y cuándo se deben utilizar en cada momento y aplicarlos de forma correcta y efectiva.

En los contextos de resolución de problemas, los contenidos de aprendizaje se sitúan en un marco de lo que le resulta familiar y cercano al alumno, quien tendrá que relacionarlo con situaciones de la vida diaria para adquirir progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y conocimientos previos. Todo ello requiere que la resolución de problemas tenga un carácter experimental, lo que, en definitiva, posibilitará la adquisición de instrumentos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla. Se contribuirá de esta forma al desarrollo armónico e integral del alumnado a lo largo de la etapa de primaria que continuará a lo largo de toda su vida personal, académica y profesional.

1. JUSTIFICACIÓN, OBJETIVOS Y CUESTIONES

1.1. Justificación

La resolución de problemas es un pilar fundamental dentro de la educación matemática. Durante toda la vida, cualquier persona se enfrenta a situaciones en las que las matemáticas van a estar presentes de una manera implícita o explícita. Por tanto, se deben enseñar, no sólo de forma teórica (aprendiendo definiciones, conceptos, reglas, teoremas...), sino de forma práctica, como una ayuda para resolver situaciones problemáticas que surjan en la vida cotidiana. Precisamente porque las matemáticas están presentes en tan variadas situaciones y aspectos de la vida, deben ser consideradas como algo cercano y cotidiano. En definitiva, las matemáticas existen para poder resolver problemas prácticos del día a día. Por lo tanto, en la enseñanza y aprendizaje de las mismas es muy importante partir de supuestos y realidades cercanas y propias del quehacer diario, logrando de este modo que el aprendizaje sea significativo. De igual manera, es importante utilizar en el aula recursos y materiales que sean variados, atractivos y, a ser posible, manipulables. De esta forma, estaremos motivando al alumnado a superar algunas concepciones o estereotipos negativos en relación a las matemáticas. Teniendo en cuenta lo anterior, es importante estudiar cómo se enfrenta y qué actitud muestra cualquier alumno/a ante la resolución de distintos problemas relacionados con situaciones de la vida cotidiana. Del mismo modo, observar cuáles son las dificultades que presenta en relación con la interpretación y comprensión de los enunciados de dichos problemas, así como qué tipo de recursos o estrategias utiliza en la posible resolución de los mismos. En este sentido, la experiencia nos demuestra que, en muchos casos, el alumnado se limita de forma un tanto mecánica, a averiguar cuál viene a ser la operación más adecuada que debe aplicar para resolver dicho problema. Nuestro papel como docentes es el de ofrecer al alumnado métodos y estrategias eficientes y motivadoras relacionadas con la resolución de problemas, teniendo siempre en cuenta las características y el grado de competencia del alumnado al que van dirigidos. Por lo tanto, con este trabajo, se pretende entre otras cosas que el alumnado consiga una mayor comprensión en el proceso de resolución de problemas

matemáticos y que conozca y aplique distintos métodos y estrategias eficaces para mejorar dicho proceso. Al mismo tiempo, se busca una mayor motivación hacia los problemas matemáticos, en particular, y hacia las matemáticas en general.

Previamente a la propuesta de intervención en segundo ciclo, se expondrá el marco teórico que la sustenta, basado en teoría y autores, propuestas pedagógicas, metodológicas y de psicología evolutiva que nos ayuda a contextualizar el trabajo.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

- Analizar e intentar mejorar las actuaciones de los alumnos frente a la resolución de problemas matemáticos.

1.2.2. Objetivos específicos

- Revisar el concepto de problema y la tipología de los mismos según diferentes autores.
- Identificar los métodos que son más eficaces en la resolución de problemas.
- Conocer estrategias generales de resolución que contribuyan a resolver con éxito las situaciones planteadas.
- Dotar de estrategias al alumnado para la comprensión y posterior resolución de los problemas.

1.3. Cuestiones

- ¿Influye la motivación en el alumnado a la hora de resolver los problemas matemáticos?
- ¿Existen dificultades de comprensión de los problemas que impiden buscar adecuadamente la solución del mismo?
- ¿Existen incoherencias en las respuestas a los problemas y bloqueos en el proceso de resolución?
- ¿Qué ocurre cuando el problema implica realizar una operación que el alumnado no domina algorítmicamente?

-
- ¿Qué tipo de estrategias resultan más eficaces en el proceso de resolución de problemas?

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Normativa legal

Aunque hoy en día disponemos de numerosos modelos para resolver problemas, hay que reconocer que los procesos de resolución han cambiado respecto a décadas anteriores, ya que se han tenido que adaptar tanto a las características, y las demandas de la sociedad del siglo XXI, como al avance y disponibilidad de diferentes medios y recursos, teniendo siempre en cuenta que el alumno es protagonista de su propio aprendizaje.

El sistema educativo español está regulado actualmente por dos normas básicas:

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) y la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), que modifica la LOE, y seis artículos y una disposición adicional de la Ley Orgánica 8/1985, de 3 de julio, reguladora del Derecho a la Educación (LODE).

- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de Educación Primaria.
- Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra.

En dicho Decreto se señala:

“Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuentes y soporte principal del aprendizaje matemático a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de problemas se requieren y utilizan muchas de las capacidades básicas: leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, comprobar si la solución se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados.” (p. 47)

La resolución de problemas es una tarea cuyo método de solución se desconoce de antemano. Para encontrar la solución, los estudiantes recurren a sus conocimientos aprendiendo a través de este proceso, en muchas ocasiones, nociones matemáticas nuevas. A través de ellos los alumnos adquieren formas de pensar, hábitos de curiosidad y constancia, y seguridad en situaciones de aprendizaje relacionados con la vida diaria.

- Orden Foral 72/2014, de 22 de agosto, del Consejero de Educación, por la que se regula la evaluación y promoción del alumnado que cursa la Educación Primaria en los centros públicos, privados y privados concertados de la Comunidad Foral de Navarra.

También considero importante mencionar las principales leyes de educación en los últimos años, para conocer mejor todo el proceso que nos ha llevado hasta la situación actual en educación.

LGE (1970) *Ley General de Educación*.

En ella se regula y estructura, por primera vez en el siglo XX, todo el sistema educativo español. Para ello se crea una educación básica, gratuita y obligatoria hasta los catorce años. Superación de las desigualdades educativas en el campo y en la ciudad. Implantación de un solo bachillerato de formación polivalente y consideración de la formación profesional como una modalidad educativa ligada tanto al mundo laboral como a los niveles educativos del sistema. Acceso a la Universidad sin discriminaciones, después de un curso de orientación. Por tanto se promulgaba la implantación de un sistema educativo inspirado en los principios de unidad, interrelación entre los niveles y flexibilidad desde una perspectiva global.

LOGSE (1990): *Ley Orgánica General del Sistema Educativo*.

A partir de la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo, se establece en Navarra el Decreto Foral 100/1992 de 16 de marzo, donde los contenidos de las áreas del currículo se estructuran en bloques, en los cuales se especifican conceptos, procedimientos y actitudes en la enseñanza.

Las matemáticas deben acercarse a la realidad del alumno y su aprendizaje se basa en la experiencia y la inducción. Es aquí cuando se considera la resolución de problemas como actividad fundamental para la adquisición de conceptos matemáticos.

Según el Ministerio de Educación en 1997, las matemáticas forman parte del currículo en los primeros años de la escolaridad ya que proporcionan las herramientas necesarias para adquirir los conocimientos de otras áreas y desarrollar habilidades que el alumno necesita para toda la vida.

El alumno cuando comienza la escolaridad trae un bagaje que se debe respetar y que se debe enlazar con los conocimientos que adquiere en la escuela. Entre los contenidos matemáticos la resolución de problemas adquiere una importancia especial, ya que constituye una herramienta didáctica potente para desarrollar habilidades entre los estudiantes, además de ser una estrategia de fácil transferencia para la vida, puesto que permite al educando enfrentarse a situaciones y problemas que deberá resolver.

LOE (2006): *Ley Orgánica de Educación*.

La ley Orgánica de educación 2/2006 de 3 de Mayo determina un nuevo marco educativo. Se establece en la Comunidad Foral de Navarra en el Decreto Foral 24/2007.

La incorporación de las competencias al currículo permite al alumno aprender aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas.

La competencia matemática nos ayuda al desarrollo de habilidades y actitudes útiles para interpretar y producir información, la ampliación de conocimientos cuantitativos y espaciales y la resolución de problemas de la vida cotidiana. Para ello forma parte imprescindible la utilización del conjunto de números y sus operaciones básicas en las situaciones cercanas a la vida del alumno.

LOMCE (2013): *Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa*.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa y el Decreto Foral del currículo 60/2014 de nuestra comunidad, determinan que en educación primaria se persigue el desarrollo integral y armónico de los aspectos intelectuales, afectivos y sociales de la persona y el enfoque debe ser globalizador.

En relación a las matemáticas, éstas son entendidas como un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan no sólo a utilizar cantidades y formas geométricas, sino, y sobre todo, a hacerse preguntas, obtener modelos e

identificar relaciones y estructuras, de modo que, al analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, se pueden obtener informaciones y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas.

2.2. Fundamentación Psicopedagógica

Muchos autores han enunciado teorías de modalidad constructivista, basados en estudios empíricos, para explicar el desarrollo de aprendizaje y la construcción de conocimiento.

El constructivismo dice que el sujeto es constructor activo de su conocimiento y estructuras cognitivas. El aprendizaje es el resultado de ese proceso de construcción.

Estas teorías se distinguen por el modo que permite enfocar ese aprendizaje. Arce y col. (2019) destacan cuatro autores de reconocida difusión: Piaget, Vygotsky, Bruner y Ausubel.

- Jean Piaget y el constructivismo cognitivo

Jean Piaget (1896-1980) construyó y expuso la teoría cognitiva del desarrollo. La teoría tiene una naturaleza constructivista, puesto que el alumno avanza en la construcción de su conocimiento a través de su actividad. El fundamento de esa construcción es esencialmente cognitivo, ya que hace hincapié en estructuras cognitivas en la mente del estudiante.

El desarrollo está influido por la maduración biológica, el aprendizaje y la interacción con el contexto. Hay que esperar niveles para el desarrollo, para proponer aprendizajes. El desarrollo precede al aprendizaje. La comunicación del niños con el medio se hace con proceso de adquisición que implica dos caminos: la asimilación (se incorporan nuevas experiencias a las preexistentes) y la acomodación (modifican esquemas previos para asimilar nuevas experiencias).

La inteligencia es la capacidad de adaptación al medio.

Piaget establece cuatro estadios o periodos.

1. Etapa sensorio-motor (aproximadamente de 0 a 2 años): caracterizada por una inteligencia práctica, capacidad de imitación, conservación del objeto y a los dos años función simbólica con la aparición del lenguaje.

2. Etapa preoperacional (aproximadamente de 2 a 7 años): caracterizada por la inteligencia simbólica o representativa. Razonamiento por intuiciones, no lógico y el desarrollo de los primeros símbolos y representaciones (palabras, imágenes mentales de objetos, etc.).
3. Etapa de las operaciones concretas (aproximadamente de 7 a 11 años): caracterizada por un razonamiento lógico sobre objetos concretos. Primeras operaciones aplicables a situaciones concretas y reales. Supera el egocentrismo, la lógica y la reversibilidad.
4. Etapa de las operaciones formales (aproximadamente de 11 a 16 años): caracterizada por un razonamiento de tipo hipotético-deductivo, sobre objetos abstractos, y basado en la acción reflexiva sobre objetos conocidos. Desligamiento de lo concreto.

- Lev Vygotsky y el constructivismo social

Lev Vygotsky (1896-1934) establece en su teoría que el aprendizaje precede al desarrollo, despertando procesos que de otra manera no podrían ser actualizados. Hay que ayudar al niño en su proceso de aprendizaje. El proceso de formación de las funciones psicológicas se proceso en interacción social. Y para ello destaca el lenguaje como un instrumento primordial, estableciéndose una relación entre el pensamiento y el lenguaje. El lenguaje es el medio por el cual llega el pensamiento a la mente, y por el cual el pensamiento se articula y expresa hacia el exterior.

Otra idea de Vygotsky es la de zona de desarrollo próximo. Esa zona es la distancia entre el nivel de desarrollo real del alumno (aquello que el alumno ya sabe y es capaz de desarrollar de forma independiente y autónoma) y el nivel de desarrollo potencial (aquello que el alumno podría llegar a saber y a saber hacer con la ayuda del profesor o de otros alumnos). Defendía que los procesos de enseñanza-aprendizaje deben situarse dentro de esta zona de desarrollo próximo, y no sobre aquello que el alumno ya sabe y es capaz de hacer, o sobre aquello que está demasiado alejado de sus conocimientos actuales.

- Jerome Bruner y el aprendizaje por descubrimiento.

Jerome Bruner (1915-2016) sostiene que el desarrollo del aprendizaje se sustenta en la actividad del alumno.

El docente debe proporcionar al alumnado problemas y situaciones para involucrarse de forma activa con curiosidad y motivación suficiente. En el alumnado se producen procesos como la observación, comparación formulación de hipótesis o discriminación. Todo ello genera un aprendizaje y conocimientos por sí mismo. Este trabajo inicial se basa en un pensamiento de tipo intuitivo o inductivo, obteniendo relaciones. Pero de ahí es necesario un pensamiento de tipo analítico para comprobar si esas ideas o relaciones concretas se pueden formular de un modo más general.

Otra idea de Bruner es que los diferentes conceptos se traten a lo largo de muchos niveles de enseñanza con complejidad progresiva. Y la labor del docente es fundamental en ese descubrimiento para guiar al alumno.

- David Ausubel y el aprendizaje significativo

David Ausubel (1918-2008) señala que para que un estudiante considere que ha desarrollado un aprendizaje, éste ha de resultar significativo, es decir conseguir que la nueva información quede integrada en sus conocimientos previos.

Tres condiciones son necesarias para su construcción:

- El docente debe conocer los conocimientos previos que tiene el alumno, ya sean pertinentes, parciales, más generales o incluso erróneos.
- La necesidad de que el alumno quiera y tenga disposición para realizar esas asociaciones con sus conocimientos, lo cual permite incorporar los nuevos conocimientos con su bagaje.
- El docente debe presentar nuevos conocimientos de forma significativa, maximizando su potencial para resultar significativos a los alumnos: ir de lo general a lo particular, incluir organizadores previos y gráficos de la información, etc.

María Montessori (1870-1952), merece especial reconocimiento, pedagoga italiana y autora del método que lleva su nombre. Como bien indica Velasco (2010), la función del adulto es guiar al niño en su proceso de aprendizaje y proporcionarle un ambiente de forma respetuosa, lo que hace que se construya a sí mismo a partir de los elementos del ambiente donde se desarrolla. El alumno debe tener un papel más activo y dinámico en el proceso de aprendizaje. Desarrolla ese potencial a través de los sentidos, en un ambiente

preparado por un profesor entrenado. Para ello Montessori crea materiales y ejercicios didácticos seriados por ella misma, cuya finalidad es la confianza en sí mismo, la concentración, la coordinación y el orden. La enseñanza puede ser individual o en grupos variados. El niño escoge su propio trabajo de acuerdo a interés y habilidad y marca su velocidad. Son constantes el orden, el silencio y la concentración.

Este método ha tenido gran influencia en la educación infantil y existen escuelas Montessori en muchos países, incluido España, y su aplicación también en diferentes colegios de Navarra.

Por lo tanto y teniendo en cuenta las teorías anteriores, podemos decir que existe un planteamiento constructivista en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que no se basa en diseñar ejercicios, sino en diseñar entornos sociales de aprendizaje y alfabetización matemática, que podría resumirse en:

- El proceso de enseñanza – aprendizaje es dinámico y participativo, donde el protagonista es el que aprende. La tarea del docente es guiar al alumno.
- Entender el aprendizaje de las matemáticas como un proceso de construcción individual que se produce a través de las interacciones individuales y grupales que se realiza en el aula. El grupo-clase y la escuela son referentes para el aprendizaje.
- Se debe facilitar la construcción de aprendizajes significativos diseñando actividades de enseñanza-aprendizaje que permitan a los alumnos establecer relaciones entre los conocimientos y experiencias previas y los nuevos aprendizajes.
- La interacción alumno-profesor y alumno-alumno, es esencial para que se produzca la construcción de aprendizajes significativos y adquisición de conocimientos.
- Se deben respetar los diversos ritmos y maneras de construir los diferentes tipos de contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos y actitudes).
- Son muy importantes tanto los conocimientos previos, el contexto físico, social y cultural del alumno como la necesidad de que el docente le estimule para que experimente, manipule, descubra y obtenga conclusiones.

2.3. Concepto Resolución de Problemas

2.3.1. Definición

Podemos considerar la resolución de problemas como una de las actividades más complicadas e importantes que se plantean en matemáticas. Los contenidos de esta área comienzan a tener sentido desde el instante en que es necesario aplicarlos para resolver una situación problemática.

“Un problema es una situación que un individuo o grupo quiere o necesita resolver, y para lo cual no dispone, en principio, de un camino rápido y directo que le lleve a la solución, consecuentemente eso produce un bloqueo. Conlleva siempre un grado de dificultad apreciable, es un reto que debe ser adecuado al grado de formación de la persona o personas que se enfrentan a él.” (Echenique, 2006, 20).

Según la dificultad del problema al que se enfrente un individuo, pueden suceder dos situaciones:

- Si es muy elevada en comparación con su formación matemática, abandonará la actividad rápidamente al ser consciente de la frustración que le produce por no poder resolverla.
- Si es demasiado fácil y su solución no presenta especial dificultad, ya que desde el principio ve claramente cuál debe ser el proceso a seguir para llegar al resultado final, esta actividad no será un problema para él, sino un simple ejercicio.

De este modo podemos decir que la actividad que para alumnos de ciertas edades puede concebirse como un problema, para otros no pasa de ser un mero ejercicio.

2.3.2. Diferencia entre Ejercicio y Problema

- Ejercicio:
 - Para su resolución no implica una actividad intensa de pensamiento.
 - El alumno se da cuenta de que para realizarlo no exigen grandes esfuerzo.
 - Suele tener una única solución.
 - Generalmente son actividades de entretenimiento, de aplicación mecánica de contenidos o algoritmos aprendidos o memorizados.

-
- Sirven al profesor para comprobar que los alumnos han automatizado los conocimientos que pretendía enseñar.
 - Sirve al alumno para consolidar dichas adquisiciones.

Hacer ejercicios en serie puede resultar aburrido, ya que generalmente son repetitivos y pueden ser poco interesantes. Sin embargo, en ocasiones pueden motivar al alumnado, pues de esa manera toma conciencia de los conocimientos que va adquiriendo. Son el tipo de actividades más abundantes en los tipos de textos. Se deben seleccionar los más útiles para evaluar el grado de comprensión de los conceptos y adquisición de algoritmos matemáticos por parte de los alumnos y no abusar de ellos.

Cuando el alumno se implica muestra entusiasmo y desarrolla su creatividad personal. Por ello es frecuente manifestar cierto nivel de satisfacción personal al descubrir el camino que le conduce al resultado final como fruto de la investigación llevada a cabo.

- Problema:

- No se resuelve con la aplicación de una regla o receta conocida a priori.
- Exige al que lo resuelve sumergirse en su interior y navegar entre los conocimientos matemáticos que posee y rescatar los que puedan ser útiles para aplicar en el proceso de resolución. Puede servirse de experiencias anteriores con situaciones parecidas.
- Puede tener una o varias soluciones y en muchas ocasiones diferentes maneras de llegar a ellas. Cuando un alumno se implica, muestra entusiasmo y desarrolla la creatividad personal. Cuando se llega al resultado final es frecuente manifestar cierto grado de satisfacción.
- El tiempo que lleva a la resolución de un problema es bastante mayor que el que lleva a la realización de un ejercicio.
- Para resolverlo se deben tener en cuenta conocimientos y experiencias previas similares para recordar cuál fue el camino a seguir y poder volver a utilizarlo.

2.3.3. Diferentes Concepciones

Los siguientes pensamientos corresponden a autores con una percepción excesivamente mecanicista (citados en Echenique, 2004, 10), en relación a la aplicación de contenidos previamente aprendidos.

"Casi todos los problemas matemáticos se pueden resolver directamente aplicando reglas, fórmulas y procedimientos mostrados por el profesor o dados en el libro. Por tanto el pensamiento matemático consiste en aprender, memorizar y aplicar reglas, fórmulas y procedimientos" (Garofalo, 1989).

"Sólo hay una manera de responder correctamente a cada problema; normalmente es el método que el profesor acaba de mostrar recientemente en clase" (Schoenfeld, 1992).

"Los problemas de matemáticas son tareas para aplicar reglas aprendidas, por tanto, se pueden resolver fácilmente en pocos pasos" (Frank, 1988).

"Los ejercicios de los libros de matemáticas se pueden resolver con los métodos presentados en el libro; además, han de ser resueltos con los métodos presentados en el apartado del libro en el que se proponen" (Garofalo, 1989).

"La resolución de problemas es una actividad de reconocimiento/aplicación de las técnicas trabajadas en clase y a la vez de acreditación de las técnicas aprendidas" (Vila, 2001).

"Si se es bueno en matemáticas, se es bueno resolviendo problemas" y, por el contrario, "si se tiene dificultades en matemáticas, se tendrán dificultades resolviendo problemas" (Woods, 1987).

Sin embargo hay otros autores que tienen una concepción muy diferente respecto a la resolución de problemas matemáticos, como son los mencionados en Poggioli (2009, 9):

Newell y Simón (1972) definen el problema como una situación en la que el individuo desea hacer algo, pero desconoce la acción necesaria para lograr su objetivo.

Chi y Glaser (1983) ven el problema como una situación en donde un individuo actúa con el propósito o finalidad de alcanzar una meta utilizando estrategias determinadas para ello.

Según Mayer (1983) (citado en Poggioli, 2009), los problemas tienen 4 componentes:

1. Las metas. Estas son los objetivos que se pretenden alcanzar en una situación determinada.
2. Los datos. Es la información que necesita el estudiante para analizar y resolver la situación problema, los cuales pueden presentarse de manera explícita o implícita en el enunciado de un problema.
3. Las restricciones. Denomina así al conjunto de factores que limitan el camino para lograr solucionar la situación planteada.
4. Los métodos. Operaciones o procedimientos que deben aplicarse para alcanzar la solución.

Vega Méndez (1992) (citado en Pérez y Ramírez, 2011, 173), define una situación – problema como “aquella que exige que el que la resuelva comprometa en una forma intensa su actividad cognoscitiva. Es decir, que se emplee a fondo, desde el punto de vista de la búsqueda activa, el razonamiento y elaboración de hipótesis, entre otras.”

Pero como bien indican Pérez y Ramírez (2011), puede ocurrir que una misma situación pueda representar o no un problema para diversos estudiantes, ya que para algunos los pueden resolver de forma mecánica, sin ningún esfuerzo cognitivo, y en realidad esas situaciones no constituyen verdaderos problemas. Por lo tanto, además de interiorizar los contenidos propios del área para hacer frente a la resolución de problemas matemáticos, intervienen procesos internos como la concentración, esfuerzo, el interés, la creatividad, la autoconfianza... así como procesos de investigación: analizar los datos del enunciado, pensar en posibles vías de resolución, que ayudan a resolver con éxito la tarea.

2.4. Modelos de Resolución de Problemas

Desde principios del siglo XX diferentes autores han propuesto pasos o etapas que deben cumplirse para poder resolver un problema con éxito. Se debe realizar una actividad mental a veces algo compleja, que debe ser secuenciada mediante una serie de fases que marcan los modelos de resolución de problemas.

2.4.1. Modelo Muller y Jungk

Muller (1978) y Jungk (1982) (citados en Díaz y Díaz, 2018) conciben todo un sistema teórico que denominan instrucción heurística, que incluye procedimientos para facilitar la búsqueda de la vía de solución y que se integran en un programa o sistema de procedimientos que incluye:

1. Orientación hacia el problema.
2. Trabajo en el problema es decir elaboración.
3. Solución del problema es decir realización.
4. Evaluación de la solución y la vía.

2.4.2. Modelo Schoenfeld

Schoenfeld (1985) (citado en Díaz y Díaz, 2018) centra una atención especial a la relación que hay entre la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento. El método que propone sigue los siguientes pasos:

1. Comprensión del problema.
2. Diseño de un plan de solución.
3. Ejecutar el plan.
4. Mirada retrospectiva.

2.4.3. Modelo Krulik y Rudnick

Kulik y Rudnick (1988) (citados en Díaz y Díaz, 2018) proponen un modelo que se orienta a superar las insuficiencias en la enseñanza matemática. Conciben como una habilidad la resolución de problemas y defienden que el desarrollo del pensamiento es la parte más importante en el proceso de resolución, el cual dividen en etapas:

1. Lectura del problema.
2. Exploración.
3. Selección de una estrategia.
4. Resolver el problema.
5. Vista retrospectiva y extrapolación a otros problemas.

2.4.4. Modelo Wallas

Wallas (1926), (citado en Poggioli, 2009), plantea las siguientes fases a la hora de resolver un problema:

1. La *preparación*, que permite al solucionador analizar el problema y buscar información al respecto, tratando de definirlo claramente.
2. La *incubación*, donde el solucionador analiza el problema de manera inconsciente.
3. La *inspiración*, que permite al solucionador vislumbrar la solución de manera inesperada.
4. La *verificación*, donde se revisa la solución encontrada.

2.4.5. Modelo Andre y Hayes

Andre (1986) y Hayes (1981) (citados en Poggioli, 2009, 12-13) plantean etapas en la resolución de un problema que ayudan al solucionador a acercarse a la solución:

1. Darse cuenta del problema, de que hay una distancia entre lo que se tiene y lo que se desea.
2. Especificación del problema, donde se describe de forma más precisa el problema.
3. Análisis del problema para identificar la información relevante.
4. Generación de la solución, considerando diferentes alternativas.
5. Revisión de la solución.
6. Selección de la solución factible, es decir se escoge aquella que tenga mayor probabilidad de éxito.
7. Instrumentación de la solución, se implementa la solución.
8. Nueva revisión de la solución, en caso de ser necesario.

Es evidente que las etapas se aplican usualmente a problemas matemáticos y algebraicos, pero pueden aplicarse a otro tipo de problemas no relacionados necesariamente con disciplinas académicas.

2.4.6. Modelo Pólya

Pólya (1984), (citado en Pérez y Ramírez, 2011), señaló que un problema puede resolverse correctamente si se siguen los siguientes cuatro pasos:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida

Al ser el modelo de resolución de problemas en el que se han basado más autores, lo analizaremos de forma más detallada.

- Fase 1: comprender el problema.

Implica entender tanto el texto como la situación que nos presenta el problema, es decir, entender lo que se pide, ya que no se puede contestar una pregunta que no se comprende. Para ello el docente debe asegurarse que el alumno comprende el enunciado verbal del problema. Así, el alumno puede diferenciar cual es la incógnita que debe resolver y con qué datos y condición parte.

Para ello se proponen actividades tipo:

- Deducir qué se puede calcular a partir de unos datos conocidos.
- Separar datos de incógnitas.
- Decir lo mismo pero de otra manera.
- Contar la historia dando marcha atrás.

- Fase 2: concebir un plan.

Según Pólya (1989) “Tenemos un plan cuando sabemos, al menos a `grosso modo`, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita”. (p. 30).

Una vez comprendido el problema, se traza el plan de resolución, el cual puede ser complicado de idear, pues depende en gran parte de los conocimientos y experiencias previas del individuo.

Para ello es necesario y útil:

- Enunciar la planificación por escrito de forma simplificada y secuenciada. Sirve para controlar el proceso de resolución por parte del alumno y para que el profesor conozca el pensamiento matemático durante la ejecución de la tarea.
 - Uso de esquemas para clarificar la situación a resolver y procesos a seguir.
 - Recordar si se han realizado problemas similares con anterioridad y que metodología se siguió.
 - Planificar la resolución es una ayuda para la comprensión y poder seguir distintas vías hasta alcanzar la solución del mismo.
- Fase 3: ejecución del plan.

En esta fase el individuo debe aplicar el plan que ha diseñado, hacer uso de sus habilidades de pensamiento y concentración para resolver el problema. Consiste en la puesta en práctica de cada uno de los pasos diseñados en la planificación. Es necesaria una comunicación y justificación de las acciones seguidas: primero cálculo..., después..., por último..., hasta llegar a la solución. Esta fase concluye con una expresión clara de la respuesta obtenida. En ella está:

- Gestión de los recursos: la lectura analítica consiste en una lectura de texto profunda de forma que se diferencian sus partes y relaciones con la misión de ayudar a comprender el problema. Tiene como finalidad que el alumno pueda elaborar una representación de todo el sistema de relaciones específicas.
- Representación: es la realización de esquemas gráficos a partir de los datos que se extraen del enunciado es una estrategia a utilizar. Los más utilizados son esquemas lineales, esquemas tabulares, esquemas ramificados y esquemas de conjuntos.

▪ Fase 4: examinar la solución obtenida

Un problema no termina cuando se ha hallado la solución, sino cuando quien resuelve ya no puede aprender más de esta solución. Se debe hacer revisión del proceso seguido para analizar cómo se ha llevado a cabo la resolución. Esta práctica retrospectiva le permite consolidar sus conocimientos y mejorar la comprensión de la solución a la que llegó.

Esto supone:

- Constatar el resultado obtenido para saber si es la respuesta válida a la situación planteada.
- Reflexionar si se podía haber llegado a esa solución por otras vías.
- Decidir si durante el proceso ha habido bloqueos y cómo se ha avanzado.
- Pensar si el camino seguido es extensible a otras situaciones.

Todos estos aspectos se deben trabajar en el aula para conocer la forma de razonar, proceder y actuar de los alumnos.

Hay técnicas de revisión o comprobación:

1. Tanteo ensayo y error (utilizada ante una situación difícil):

Supone la búsqueda de soluciones por medio de pruebas sucesivas. El individuo elige y aplica un posible proceso de resolución y si no es correcto, prueba con otro.

Hay que tener en cuenta que en la prueba sistemática se debe analizar cada vez la solución, para compararla con las anteriores soluciones para ver si existe alguna regularidad, que permita disminuir el número de cálculos que se necesitan realizar y también para tener la seguridad de no haber dejado soluciones sin ser consideradas o sin ser comprobadas.

2. Comprobación:

Esta técnica supone garantizar el procedimiento que se ha empleado, los cálculos efectuados, y que los resultados que se han obtenido, sean correctos o estén dentro de lo posible.

La comprobación se utiliza con eficacia cuando se dan relaciones parte - todo en un problema. También cuando:

- a. Se realiza la operación inversa a la dada para comprobar si se obtiene el mismo resultado.
- b. Se realiza el problema por distintas vías y se comparan los resultados.
- c. Se realiza una estimación previa y se compara con el resultado.

2.5. Estrategias de Resolución de Problemas

“Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un gran descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo.” (Pólya, 1989, 5).

A través del planteamiento de problemas matemáticos, el docente tiene la tarea de despertar la curiosidad de los estudiantes. Para ello debe ofrecerle situaciones variadas que estimulen la reflexión, pero además debe dotar de herramientas y recursos que anime a descubrir soluciones a la presentación de problemas por sí mismos. Por ello el docente debe conocer estrategias de resolución de problemas matemáticos.

A continuación se hará referencia a algunas estrategias definiendo este término:

Según Dijkstra (1991), la resolución de problemas es un proceso cognitivo complejo que involucra conocimiento almacenado en las memorias de corto y largo plazos (citado en Poggioli, 2009, 11).

“Las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos y obtener una solución” (citado en Poggioli 2009, 25)

Estas estrategias comprenden los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente. Según Poggioli (2009) los métodos heurísticos son: “estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizados por los solucionadores de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución.” (p. 25)

Pueden ser generales, que se pueden aplicar a una gran área de dominio y específicos, que se refieren a un área de conocimiento en particular.

Los procedimientos heurísticos generales componen diversos procedimientos. Poggioli (2009) propone los siguientes:

- Trabajar en sentido inverso. Este procedimiento de trabajar de atrás hacia delante se usa en el área de geometría para probar algunos teoremas y consiste en convertir las metas en datos y partir de allí resolver el problema. Esta situación es similar a la que se utilizamos en la vida cotidiana, cuando por ejemplo, perdemos un objeto y tratamos de recordar los pasos que hemos realizado para determinar el lugar donde los pudimos haber perdido.
- Subir la cuesta. Consiste en avanzar desde una situación actual a otra que esté más próxima a la meta que se quiere alcanzar, de forma que al encontrarse en ese estado más cercano, se evalúe el nuevo estado en el que esté después de cada posible movimiento, pudiendo seleccionar siempre el que éste más próximo de la meta. Es una estrategia utilizada en el ajedrez por ejemplo.
- Análisis medios - fin. Se basa en la descomposición de la meta en submetas para luego ir solucionándolas individualmente de una en una,

hasta completar la solución final eliminando así los obstáculos que se lo impedían.

- Los algoritmos. Se consideran procedimientos específicos que nos señalan cuál es la solución del problema. Al contrario que el método heurístico, garantizan el alcance de los objetivos que se buscan en el problema y se acercan a la solución. Sin embargo, cabe destacar que los procedimientos heurísticos son más útiles que los algoritmos cuando no se conoce la solución del problema.
- Procesos de pensamiento divergente. Este procedimiento permite la generación de enfoques alternativos a la solución del problema y se relacionan con la creatividad, imaginación, originalidad e inspiración. Implica la generación de una gran variedad y cantidad de ideas o respuestas que dan solución alternativa a un problema.

Salazar (2000) (citado en Pérez y Ramírez, 2011) propone otras estrategias heurísticas para la resolución de problemas:

- Ensayo y error: Es una estrategia útil para resolver cierto tipo de problemas como por ejemplo los de selección, en donde se proporcionan varias alternativas de posibles soluciones y el individuo debe probar cada una, hasta llegar a la respuesta correcta.
- Hacer un dibujo: consiste en representar datos o información que aparecen en el problema y es de gran utilidad ya que permite visualizar mejor la situación planteada y de esa manera el alumno lo comprende mejor.
- Resolver un problema más simple: se simplifica el problema, resolviéndolo en pequeñas cantidades o tratar de resolver uno relacionado pero más sencillo. Ello puede hacer que se entienda mejor el problema que se pretende resolver.

García (2002) (citado en Pérez y Ramírez, 2011), partiendo de los procedimientos heurísticos que propone Pólya (1984), ofrece recomendaciones importantes a los docentes para ayudarles a mejorar las estrategias en la resolución de problemas como son:

- Plantear al alumnado situaciones variadas y diferentes relacionadas con experiencias de la vida real y de situaciones ficticias, que susciten interés y curiosidad en el mismo.

-
- Proponer problemas variados en cuanto a enunciados y posibles soluciones (una solución, varias o sin solución) para evitar un proceso de resolución memorístico y mecánico, facilitando de este modo la reflexión y utilización de procesos cognoscitivos en cada situación.
 - Ofrecer problemas variados en cuanto a la adecuación de los datos, es decir, presentando datos tanto completos como incompletos, e incluso superfluos o innecesarios. Haciendo así que el alumnado lea y comprenda bien el problema antes de idear el plan de resolución, teniendo claro cuál es la información relevante del mismo.
 - Poner el énfasis e interés más en los procesos de resolución, que en los resultados, y que dichos procesos podrán ser utilizados en situaciones problemáticas posteriores.
 - Proponer al alumnado que verbalice o escriba el proceso que ha seguido en la resolución de los problemas, para de esta manera llegar a conocer los procesos procedimientos mentales que ha utilizado. Del mismo modo se pueden valorar las estrategias utilizadas, para poder ayudar a quien manifieste alguna dificultad.
 - Plantear diversas actividades de resolución de problemas, tales como: ante unos datos del enunciado, pedir cual podría ser la pregunta, o bien ante una determinada pregunta elegir los datos que encajan para responderla, o también dada la incógnita, preguntar por los datos. Todo ello permite al docente planificar los enunciados y planificar situaciones que requieran del alumnado reflexionar, analizar y razonar a la hora de determinar el plan con el que poder obtener la solución a los problemas.

Es preciso señalar los trabajos de Baroody (1994) (citado en Pérez y Ramírez, 2011), quien sostiene que en los problemas rutinarios que son mecánicos, repetitivos y en formato sencillo que no requieren ningún tipo de análisis por su parte, los niños suelen tener éxito, ya que se asimilan con rapidez. Por otra parte, los problemas que tienen más dificultad requieren un análisis cuidadoso que necesitan de una estrategia planificada y comprobación de resultados con los siguientes aspectos:

- La comprensión. Se trata de definir claramente la incógnita o meta del problema y los métodos más adecuados para ello.

-
- Uso de técnicas para la resolución de problemas. Como puede ser la representación a través de un dibujo por ejemplo. Es importante que se utilicen estas estrategias heurísticas para ayudarse a analizar el problema
 - Motivación. El individuo debe estar motivado para realizar el esfuerzo que exige llegar a la solución del problema.
 - Flexibilidad. Hacer sentir al alumnado con libertad para ensayar respuestas, probar una y otra vez y equivocarse hasta descubrir por sí mismo la solución a las situaciones planteadas.

Finalmente se presenta una síntesis con algunas consideraciones que el docente debe asumir en el desarrollo de estrategias de resolución de problemas:

- Los problemas planteados en la escuela deben estar relacionados con el contexto de los estudiantes, lo que despierta curiosidad e interés en los mismos.
- El docente debe diseñar el tipo de problema que trabajará y el grado de dificultad adecuado al nivel de los escolares. Debe ser cuidadoso de que no sean tan fáciles como para que no reflexionen, ni tan difíciles como para que se sientan frustrados, incapaces de afrontar la resolución.
- Los enunciados deben redactarse con un lenguaje claro y preciso, además de ser creativos y originales. Las palabras que se utilicen tienen que estar relacionadas con la realidad de los estudiantes. Los problemas no deben ser rutinarios, ni repetitivos, sin que se resuelven de forma mecánica y memorística con poco esfuerzo cognitivo por parte del alumnado.
- El docente orienta al alumnado para utilizar estrategias o técnicas en la resolución de problemas (usar dibujos, representar gráficamente los datos, hacerse preguntas relacionadas con el problema, etc.). Inicialmente deben leer el problema con atención y tratar de comprenderlo, antes de cualquier búsqueda de solución.
- El docente debe enseñar que no existe una manera única de resolver un problema, ya que un mismo problema puede ser resuelto de manera distinta.

-
- El docente debe animar a anticipar resultados en los estudiantes, ya que a veces aceptan como correctos resultados que son ilógicos, puesto que confían más en los procedimientos adquiridos mecánicamente que en el propio razonamiento.

Como bien indican Pérez y Ramírez (2011), la resolución de problemas constituye el centro de las matemáticas y el docente debe utilizarla para enseñar esta disciplina. Pero a veces se trabaja con ejercicios rutinarios, mecánicos que no estimulan los procesos cognitivos entre los estudiantes. Deben proponerse retos que impliquen un esfuerzo cognitivo para resolverlos, para lo cual debe conocer las taxonomías, sus características, las etapas de resolución así como posibles estrategias de enseñanza que se utiliza para la resolución de los mismos.

Hay que señalar que existen numerosas estrategias para resolver problemas desarrolladas por diferentes autores, y son de gran utilidad para ser aplicadas por los docentes tanto a nivel personal como pedagógico. Por ello, es muy importante que el docente conozca y domine diversas técnicas para ofrecer a los estudiantes herramientas que le faciliten adquirir y consolidar esta destreza. Al ofrecer estrategias al alumno, se le simplifica y facilita el trabajo, sin embargo hay que permitir al alumno reflexionar sobre las mismas para ir adquiriendo progresivamente habilidades y destrezas, que le facilitarán resolver todo tipo de problemas que se le presente.

En conclusión, la resolución de problemas requiere por parte de los alumnos una actividad mental que se pone en funcionamiento desde el momento que se presenta el enunciado hasta el momento en que se halla la solución que se da por terminado el problema. Para una buena resolución es importante el ambiente que se crea en el aula. Los alumnos deben tener disposición abierta hacia los problemas, se tomen el trabajo con tranquilidad, se concentren en la lectura del enunciado y se dispongan a intercambiar opiniones. Se debe dedicar tiempo a ejercer como modelos de buenos resolutores y explicar los procesos de pensamiento que tienen lugar (la mayor parte de aprendizajes los hacemos por imitación a través de la observación y la práctica).

2.6. Tipos de problemas a trabajar en Educación Primaria

Según Echenique (2006), podemos diferenciar los siguientes tipos de problemas.

1. Problemas aritméticos

- a. Problemas aritméticos de primer nivel. Se suelen llamar de un solo paso, ya que es necesaria la aplicación de una sola operación para su resolución.
 - Problemas aditivo-sustractivos. Pueden ser problemas de cambio, problemas de combinación, problemas de comparación y problemas de igualación.
 - Problemas de multiplicación-división. Pueden ser problemas de repartos equitativo o de grupo iguales. Problemas de factor N o de comparación multiplicativa. Problemas de razón o de tasa. Problemas de producto cartesiano.
- b. Problemas aritméticos de segundo nivel. Se llaman también combinados. Para su resolución es necesario realizar varias operaciones (dos o más) en un cierto orden.
 - Problemas combinados fraccionados: en el enunciado aparecen varias preguntas encadenadas, las cuales ofrecen al resolutor el plan para responder a la última pregunta.
 - Problemas combinados compactos: se debe relacionar los datos aportados y concebir el plan para llegar a la solución del problema.
 - Problemas combinados puros: en ellos los pasos intermedios para la resolución pertenecen todos al mismo campo operativo-conceptual.
 - Problemas combinados mixtos: en su resolución intervienen distintas operaciones pertenecientes a campos conceptuales diferentes.

-
- Problemas combinados directos: en ellos los datos expresados en el enunciado están dados en el mismo orden en que deben ser utilizados al resolver el problema.
 - Problemas combinados indirectos: el resolutor debe reordenar los datos en función de la pregunta formulada en el enunciado, y combinarlos de forma que le permita elaborar el plan que le llevará a la solución.
- c. Problemas aritméticos de tercer nivel. En ellos los datos del enunciado vienen dados en forma de números decimales, fraccionarios o porcentuales. La situación planteada es similar a las de primer o segundo nivel, la dificultad añadida está en el tipo de números en los que se expresan los datos.
2. Problemas geométricos. Se trabajan contenidos y conceptos de ámbito geométrico, con diferentes formas y elementos, orientación, giros...Se continúan en secundaria. Pero es importante tener una buena base para ir ampliando en cursos posteriores.
3. Problemas de razonamiento lógico. Permiten desarrollar destrezas para afrontar situaciones con un componente lógico.
- a. Numéricos: los criptogramas, líneas y otras figuras sobre las que hay que colocar números cumpliendo determinadas condiciones.
 - b. Balanzas de dos brazos: problemas gráficos en lo que una vez representadas algunas pesadas realizadas, se trata de averiguar otras equivalencias en función de los objetos utilizados.
 - c. Enigmas: Constituyen un ejercicio mental, estimulan la imaginación y desarrollan la facultad de la inteligencia. No tienen por qué ser propiamente matemáticos.
 - d. Análisis de proposiciones. Son actividades que desarrollan la capacidad de articular argumentaciones y dar explicaciones. Exigen utilizar el lenguaje con precisión.
4. Problemas de recuento sistemático. Son problemas que tienen varias soluciones y es necesario encontrarlas todas. Puede ser de ámbito numérico o geométrico.
5. Problemas de razonamiento inductivo. Consiste en enunciar propiedades numéricas o geométricas a partir del descubrimiento de

regularidades. Intervienen variable y es necesario expresar la dependencia entre ellas.

6. Problemas de azar y probabilidad. Situaciones planteadas a través de juegos o situaciones que permite descubrir a los alumnos la viabilidad o no de opciones presentadas o posibilidad de ganar en el juego.

2.7. Aprendizaje cooperativo

Tal como indica Cascante (2009), el aprendizaje cooperativo se refiere a un procedimiento de enseñanza que parte de la organización de la clase en pequeños grupos mixtos y heterogéneos donde los alumnos trabajan conjuntamente de forma coordinada entre sí para resolver tareas académicas y profundizar en su propio aprendizaje. Su estructura y dinámica se apoyan en las siguientes teorías:

- Teoría Sociocultural de Vygotsky. Se basa en que el desarrollo psicológico del individuo es el resultado de su interacción constante con el contexto socio-histórico en el que vive. El aprendizaje es un proceso donde lo social y lo individual se interrelacionan, es decir, las personas construyen el conocimiento dentro del medio social en el que viven. Para explicar esto propone el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) que se encuentra entre la distancia entre el nivel de desarrollo real de niño, determinado por la capacidad de resolver problemas de manera independiente, y el nivel de desarrollo potencial.
- Teoría genética de Piaget: La interacción social es fundamental para el desarrollo de las estructuras intelectuales superiores (razonamiento, planificación, memoria, atención voluntaria, creatividad...), cuyo papel resulta decisivo para el aprendizaje.
- Teoría de la interdependencia de los hermanos Johnson. Según la forma de interdependencia social dentro de un grupo, se determina la interacción entre sus miembros:
 - Interdependencia positiva (cooperación): deriva en una interacción promotora en la que los individuos animan y facilitan los esfuerzos de los demás. Esta facilita relaciones interpersonales positivas y a la salud emocional.

- Interdependencia negativa (competencia): deriva en una interacción de oposición en la que los individuos desalientan y obstruyen los esfuerzos de los demás. Disminuyen los esfuerzos hacia el logro.
- Ausencia de interdependencia (esfuerzos individualistas): no existe interacción ya que los individuos trabajan independientemente sin ningún intercambio.
- Aprendizaje significativo de Ausubel: el alumno debe pasar a la actividad y convertirse en un constructor de conocimientos, esto es, establece relaciones entre sus conocimientos previos y el nuevo contenido.

“No es lo mismo trabajar en grupo, que trabajar en grupo cooperativo. Todo aprendizaje cooperativo es aprendizaje en grupo, pero no todo aprendizaje en grupo es aprendizaje cooperativo.”, tal y como afirma Ovejero (1990), (citado en García R. y Col, 2012, 36).

El aprendizaje cooperativo hace referencia a la actividad en pequeños grupos desarrollada en el aula. No se trata de que los alumnos formen equipos, sino de que estos equipos, después de recibir instrucciones del profesor, intercambien información y trabajen en una tarea hasta que todos sus miembros la entiendan y aprendan a través de la ayuda mutua, siempre en colaboración.

Tabla 1. Diferencias entre aprendizaje cooperativo y grupal (García López, 1996) (citado en García, R. y Col, 2012, 37)

APRENDIZAJE COOPERATIVO	APRENDIZAJE GRUPAL
Interdependencia positiva: interés por el máximo rendimiento de todos los miembros del grupo.	Interés por el resultado del trabajo
Responsabilidad individual de la tarea asumida	Responsabilidad solo grupal
Grupos heterogéneos	Grupos homogéneos
Liderazgo compartido	Un solo líder
Responsabilidad de ayudar a los demás miembros del grupo	Elección libre de ayudar a los compañeros/as
Meta: aprendizaje del máximo posible	Meta: completar la tarea asignada

Enseñanza de habilidades sociales	Se da por supuesto que los sujetos poseen habilidades interpersonales
Papel del profesor: intervención directa y supervisión del trabajo en equipo	Papel del profesor: evaluación del producto
El trabajo se realiza fundamentalmente en el aula	El trabajo se realiza fundamentalmente fuera del aula

Entre las características del aprendizaje cooperativo, podríamos destacar las siguientes:

- Cooperación: los alumnos se apoyan mutuamente para aprender a trabajar en equipo. Comparten metas, recursos y solo pueden tener éxito si todos los miembros del equipo tienen éxito.
- Responsabilidad: individual en la parte de la tarea que les ha correspondido y, además, son responsables de hacer comprender a sus compañeros/as su parte de trabajo.
- Comunicación: intercambiar información, materiales de tal forma que analizar y reflexionan sobre las conclusiones, procurando una mayor calidad en sus resultados y razonamientos.
- Trabajo en equipo: aprender a resolver juntos los problemas con confianza, comunicación, técnicas de solución de conflictos y toma de decisiones.
- Autoevaluación: los equipos analizan logros y fracasos, identificando problemas y buscando soluciones.

Además, el papel del profesor es:

- Supervisar el trabajo de cada equipo.
- Observar las interacciones de todos los componentes del equipo.
- Escuchar las conversaciones e intervenir cuando lo crea conveniente.
- Sugerir modos de proceder y dar orientaciones para buscar información complementaria.

Según Melero y Fernández (1995) (citado en García R. y col., 2012), el aprendizaje cooperativo puede influir sobre aspectos de la conducta social y motivacional y sobre el rendimiento académico. Además, según los resultados

de diversas investigaciones, podemos destacar las siguientes ventajas que nos ofrece el aprendizaje cooperativo:

- En su relación con los compañeros, los alumnos aprenden informaciones, actitudes, valores, habilidades que no pueden obtener de los adultos.
- Mejoran la motivación escolar de los estudiantes, sobre todo la intrínseca.
- Este aprendizaje proporciona oportunidades de trabajar la conducta prosocial (compartir, ayudar, cuidar, etc. a los demás), lo que provoca y garantiza practicar comportamientos solidarios.
- Los alumnos aprenden a ver problemas y situaciones desde otros puntos de vista diferentes a la suyo propio.
- Se fomenta la pérdida progresiva del egocentrismo.
- A través de la interacción con los compañeros, se fomenta la autonomía para ser libres, para elegir distintas opciones.
- Se posibilita una mayor comunicación e interdependencia entre los miembros.
- Se previenen desajustes en el comportamiento ya que mejora la autoestima.

3. CLASIFICACIÓN Y METODOLOGÍA

Debemos conseguir que el alumnado sea matemáticamente competente, es decir, que comprenda los contenidos y procesos matemáticos básicos, los interrelacione, los asocie adecuadamente a la resolución de diversas situaciones y sea capaz de ir formándose en estas áreas. Todo ello se consigue trabajando a lo largo de los años de escolaridad obligatoria, mediante un proceso largo y costoso, por medio de experiencias que desarrollan en el alumnado capacidades. Un proceso que no consiste en la repetición sistemática de ejercicios o algoritmos de cálculos sino proponiendo tareas que desarrollen otro tipo de capacidades como pueden ser:

- Comprensión y comunicación: con acciones como identificar, relacionar, aplicar, explicar, representar.

- Cálculo procedimental: se refiere no solo a conocer los procedimientos matemáticos sino a cuándo y cómo utilizarlos de modo apropiado, correcto y eficaz.
- Resolución de problemas: habilidad y desarrollo de las destrezas expuestas anteriormente. Precisa de una planificación de las acciones para llevar a cabo y saber utilizar de forma adecuada los conocimientos adquiridos.
- La actitud: positiva con precisión, rigor y exactitud.

Todas estas capacidades deben trabajarse de manera conjunta estableciendo relaciones entre ellas.

3.1. Clasificación

3.1.1. Clasificación de los problemas de sumas y restas

Según Godino (2004), las situaciones que dan sentido a la suma y a la resta de números naturales (situaciones aditivas de una sola operación) se clasifican según el papel que juegan los números que intervienen en ella, que es variable y puede ser:

- Estado: cuando los números del problema son el cardinal de un conjunto, el ordinal de un elemento o la medida de una cantidad de magnitud.
- Transformación: cuando alguno de los números expresa la variación que ha sufrido un estado.
- Comparación: cuando alguno de los números señalan la diferencia que existe entre dos estados que se comparan entre sí.

Dependiendo de qué papel juegan los tres números (incluyendo el desconocido) que intervienen en una situación aditiva de una sola operación, esto es, que se resuelve con una suma o una resta, obtenemos los siguientes tipos de situaciones:

- Tipo 1: *Estado-Estado-Estado (EEE)*. Una cantidad se refiere al todo y dos cantidades se refieren a las partes en que se descompone ese todo, es decir la partición de un todo en dos partes. Ejemplo: *María tiene 4 bolas en la mano izquierda y 7 en la derecha ¿cuántas tiene en total?*

-
- Tipo 2: *Estado-Transformación-Estado (ETE)*. Una cantidad que se refiere al estado inicial de un objeto y una cantidad que indica el estado final del objeto. Ejemplo: *María tiene 7 caramelos. Regala 3 a su hermana ¿Cuántos le quedan?*
 - Tipo 3: *Estado-Comparación-Estado (ECE)*. Se comparan dos estados. Ejemplo: *María tiene 8 caramelos. Tiene 5 más que Juan: ¿Cuántos tiene Juan?*
 - Tipo 4: *Transformación-Transformación-Transformación: (TTT)*. Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación. Ejemplo: *A María le dan 30 euros por la mañana. Le vuelven a dar 50 euros por la tarde. ¿Cuánto dinero le han dado en total?*
 - Tipo 5: *Comparación-Transformación- Comparación (CTC)*. En un momento inicial se comparan dos estados, que se vuelven a comparar porque uno de ellos ha sufrido una transformación. Ejemplo: *María tiene 6 caramelos más que Juan. A Juan le dan algunos más y ahora tiene un caramelo más que María. ¿Cuántos caramelos le han dado a Juan?*
 - Tipo 6: *Comparación-Comparación-comparación (CCC)*. A partir de tres estados, se comparan el primero y el segundo y el segundo y el tercero, para así, establecer la comparación entre la primera y la tercera cantidad. Ejemplo: *Pedro tiene 8 caramelos más que María. María tiene 3 más que Juan. ¿Quién tiene más, Pedro o Juan? ¿Cuántos más?*

En los seis tipos de situaciones descritas nos encontramos con dos datos (cantidades conocidas) y una incógnita (cantidad desconocida que hay que encontrar a partir de los datos). El valor de la incógnita se obtiene mediante una suma o resta de los datos y depende de la posición que ocupa dentro de la situación y del sentido de las transformaciones o comparaciones que intervienen.

3.1.2. Clasificación de problemas multiplicativos

Las operaciones aritméticas de suma y resta se realizan en un principio para abreviar los recuentos o procesos de medida, mientras que la multiplicación y división entera son un medio de abreviar los procesos de sumar (o restar), repetidamente una misma cantidad o repartir de forma igual una cantidad entre ciertos numero de seres y objetos. Por ejemplo, en lugar de sumar el número 5

ocho veces, decimos directamente que el resultado es 40, sin tener la necesidad de efectuar sumas repetidas, porque “sabemos multiplicar”.

Siguiendo a Godino (2004), podemos decir que las situaciones que dan sentido a la multiplicación y división entera se clasifican atendiendo al papel que juegan los números que intervienen en ellas y pueden ser:

- Estado, cuando expresan el cardinal de un conjunto, el ordinal de un elemento o la medida de una cantidad de magnitud.
- Razón, cuando expresan un cociente entre cantidades de magnitudes diferentes.
- Comparación: cuando indican el número de veces que una cantidad de magnitud está contenida en otra cantidad de la misma magnitud.

Por ello las situaciones multiplicativas de una sola operación se clasifican en:

- Tipo 1: *situación multiplicativa de razón (ERE)*. Intervienen dos estados que hacen referencia a magnitudes diferentes y una razón R que expresa el cociente de un estado respecto a otro. Cuando la incógnita está en la razón R se interpreta como un reparto equitativo y cuando está en un estado, se interpreta como agrupamiento o descomposición en partes iguales. Ejemplo: *María tiene 3 balones. Cada uno cuesta 15 euros: ¿Cuánto ha pagado en total?*
- Tipo 2: *situación multiplicativa de comparación (ECE)*. Intervienen dos estados que hacen referencia a una misma magnitud y una comparación C que indica el número de veces que hay que repetir uno de los estados para igualarlo a otro. Ejemplo: *María tiene 25 euros y su hermana Ana tiene 100. ¿Cuántas veces más dinero tiene Ana que María?*
- Tipo 3: *situación multiplicativa de combinación (EEE)*. Intervienen dos estados que expresan los cardinales de dos conjuntos y un tercer estado que indica el cardinal del producto cartesiano de esos dos conjuntos. Ejemplo: *En un baile hay 3 chicos y algunas chicas. Se pueden formar 6 parejas distintas entre ellos. ¿Cuántas chicas hay en el baile?*
- Tipo 4: *situación multiplicativa de doble comparación (CCC)*. Situación en que C expresa en número de veces que la primera cantidad de magnitud está contenida en la segunda, C1 indica el número de veces que la segunda cantidad de magnitud está contenida en la tercera y C2 establece el número de veces que la primera cantidad de magnitud está

contenida en la tercera. Ejemplo: *María tiene un dinero. Ana tiene 4 veces el dinero de María. Laura tiene 5 veces el dinero de Ana. ¿Cuántas veces tiene Laura el dinero de María?*

3.2. Metodología

Hemos analizado en el marco teórico la fundamentación psicopedagógica, los distintos modelos de resolución de problemas y las estrategias utilizadas en los mismos, según autores de gran relevancia en dicha materia. Teniendo esto en cuenta, además de las diferentes clasificaciones de problemas que se pueden aplicar en la educación primaria, podemos concretar la metodología que vamos a llevar a cabo en nuestra propuesta de intervención en los siguientes puntos:

- Los problemas planteados al alumnado deben ayudarle a entrar con una implicación personal en la propuesta, ya sea porque corresponda a alguna situación de su vida diaria o a algunas de sus aficiones. Cuando se consigue, el interés de la propuesta aumenta notablemente y se obtienen mejores resultados.
- Se debe transmitir confianza en la capacidad de resolución de problemas. Se debe comunicar la dificultad de la tarea a realizar y el grado de esfuerzo que exige, porque al resolverlos se siente una gran satisfacción, y en caso de fracaso, ante una tarea difícil, el alumno podrá reconocer que el error no es resultado de su falta de competencias. Lo que le animará a volver a intentarlo.
- Alternar diversas formas de plantear los problemas para que el alumnado no se acostumbre a una sola manera de identificar los datos que se le suministran y los datos que se le piden.
- Se aconseja que se trabaje en pequeños grupos donde el alumno se vea obligado a ser claro y a justificar su proceso de resolución. Estos trabajos favorecen el intercambio de ideas en torno a la resolución y que el alumno tome conciencia de que un mismo problema, puede abordarse a través de distintos procedimientos, todos ellos válidos.

Se debe utilizar la creatividad en el aula para orientar a los alumnos a descubrir problemas con estrategias más específicas, mediante actividades como:

- Dramatizar en clase técnicas de compra y venta que nos ayuden a dominarlas.

- Matematizar situaciones de la vida cotidiana.
- Utilizar e inventar juegos matemáticos: rompecabezas, numerogramas, sudokus, jeroglíficos.
- Interpretar y elaborar planos conocidos, para, por ejemplo, buscar con pistas un mensaje secreto escondido en la clase o en el.
- Hacer traducciones del lenguaje ordinario al lenguaje matemático.

Siguiendo a Pólya (1989), vamos a tener en cuenta las siguientes fases en la resolución de los problemas que les podamos plantear:

1. “ENTENDER EL PROBLEMA”

Para lograr la correcta comprensión del problema, el alumnado debe ser capaz de identificar los datos relevantes y distinguirlos de los que no lo son, para lo cual se utilizar las siguientes estrategias:

a. Lectura del problema de forma progresiva:

- Lectura en voz alta por parte de uno o varios alumnos, primero del planteamiento y luego de la pregunta.
- Acompañar la lectura con preguntas del docente que ayuden a la comprensión del problema (sin que revelen la respuesta). Ejemplo: “de qué va”, “qué nos cuenta”, “qué les ha pasado”...
- Hasta que no se comprenda el texto, se repite sucesivamente la lectura del problema con el objetivo de que la dispersión de pensamiento se vaya concentrando en su comprensión.
- Después de leerlo con pausa y reflexionando, es importante responder a las siguientes preguntas: ¿Entiendes todo lo que se dice? ¿Distingues cuáles son los datos? ¿Tenemos toda la información que necesitamos?

b. Subrayamos con lápiz de color azul los datos del problema y en rojo la pregunta con el objetivo de separar los datos de las preguntas.

c. El alumno explicará con sus propias palabras, el enunciado a un compañero: señalando cuál es la pregunta del problema,

indicando los datos que hacen falta para resolver el problema y separando los datos importantes de los que no lo son.

- d. Cuando el problema contenga más de una operación, es necesario que el alumno lo separe en sus distintas partes, para ir resolviendo cada una de ellas en relación con las restantes y con el enunciado total del problema.

2. “REALIZAR UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA”

Para la comprensión del problema y la introducción en la resolución en aquellos casos en los que la redacción del mismo les resulte especialmente difícil, la representación gráfica es un elemento fundamental. Puede hacerse mediante diagramas, gráficos o dibujos, pero no es esta la única forma de hacerlo, ya que también es aconsejable plantear situaciones problemáticas teatralizadas, con cuentos de forma oral y manipulando objetos para que ellos los puedan representar de distintas formas. Un recurso que da buenos resultados es la utilización de programas informáticos que, a través del juego, les plantean situaciones problemáticas.

3. “TRAZAR UN PLAN DE ACTUACIÓN”

Se trata de diseñar el esquema de actuación a seguir. Se pueden utilizar distintas estrategias:

- a. Utilizar palabras clave que mediante la asociación directa con la operación (juntar/unir con sumar, quitar/separar con restar) se les vayan haciendo familiares y les permitan reconocer la operación a realizar en situaciones similares.
- b. Si se duda entre posibles operaciones, se puede hacer una estimación y, mediante el ensayo y error, se llevan a cabo todas las posibilidades y se ve qué solución se ajusta al resultado más lógico y esperado.
- c. Identificar las posibles submetas que puede englobar un problema de varias operaciones. Esto supone la división del problema en partes, cada una de las cuales es imprescindible resolver para llegar a la solución final.
- d. El profesor debe plantear al alumno preguntas con el objetivo de ayudarlo en su camino para encontrar la solución: ¿Cuál es el

problema? ¿Qué estás haciendo? ¿Qué información nos dan?
¿Por qué estás haciendo esto?...

4. “REALIZAR LA OPERACIÓN QUE HEMOS PENSADO HACER”

Es necesario que el alumno lleve a cabo las estrategias que eligió previamente. Para ello, se tomará el tiempo que sea necesario. En caso de dificultad, puede solicitar ayuda para que el profesor le haga sugerencias que le permitan avanzar en la resolución. El profesor le guía con preguntas del tipo: ¿Estamos siguiendo los pasos que habíamos decidido? ¿Cuál es la operación matemática que debemos elegir?...

En esta fase, el alumno se encuentra a veces con el problema de realizar la traducción simbólica, en términos numéricos, de las ideas lógicas que ya ha desarrollado mentalmente. Es capaz de resolverlo en la cabeza el problema, pero a lo mejor no da con los algoritmos matemáticos necesarios. Para ello es necesario reforzar el significado de las operaciones aritméticas, no tanto de cómo hacerlas sino en qué casos y para qué, y los verbos de acción y/o palabras clave que nos conducen a ellas.

5. “COMPROBAR LA RESPUESTA”

Esta es la fase de verificación, de mirar hacia atrás, que consiste en recorrer los pasos que se han seguido para la resolución con el objetivo de detectar posibles errores o deficiencias. Puede suceder:

- a. Que den por terminado el problema sin que exista una respuesta escrita a la pregunta que se planteaba.
- b. Que den una respuesta escrita numérica pero sin acompañarla de alguna aclaración que de significado al dato numérico.
- c. Que no realicen una reflexión de los resultados obtenidos que refuerce el proceso realizado.
- d. Que no se extrañen ante respuestas aparentemente absurdas o sin sentido, lo que puede significar que no ven una relación entre la solución alcanzada y el enunciado del problema que les permita comprobar si el dato obtenido es correcto o no.

Para ayudarles en esta fase, se les pueden plantear las siguientes preguntas: ¿El resultado obtenido tiene lógica? ¿Has utilizado todos los datos de forma correcta? ¿El dato responde a la pregunta planteada?

4. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

Esta propuesta se ha diseñado para los alumnos de 4º curso de Educación Primaria en un colegio público de Pamplona. Los verdaderos protagonistas son los alumnos, mientras que el docente es guía y orientador, anima a los alumnos, les motiva a reconocer los éxitos, dando significado a lo que hacen, aumentando así su autoestima, y propone situaciones para mejorar el proceso de resolución. Debe ayudar durante el proceso, en la superación de miedos y bloqueos que pueda tener el alumnado, proponiendo situaciones que siempre les ayuden a mejorar.

4.1. Situación inicial

Este centro de Pamplona, que se rige por el modelo PAI (Programa de Aprendizaje en Inglés), tiene dos líneas de primaria. En matemáticas, se utiliza un libro de texto en el que se propone una amplia variedad de problemas, ejercicios y actividades que el alumnado debe resolver utilizando diferentes métodos, como dibujos, gráficas y operaciones aritméticas principalmente. Se dedica además una sesión semanal de matemáticas de forma específica a la resolución de problemas, aunque esta actividad puede estar presente también en el trabajo diario de las matemáticas. La metodología que se utiliza implica una participación activa por parte de los alumnos y alumnas, y los problemas son propuestos de diferentes maneras.

4.2. Desarrollo temporal de las sesiones

El taller se desarrollará durante 5 sesiones de 45 minutos cada una. En la primera sesión se repartirá al alumnado una serie de problemas para que traten de resolverlos. Se obtendrá así una muestra de su forma de realizarlos previa al taller que vamos a llevar a cabo. En la segunda sesión, se explicará a los alumnos en qué va a consistir la propuesta, y se ofrecerá un método con el que se pueden resolver los problemas. Durante la tercera y cuarta sesión, se comenzará el taller para proceder a resolver problemas para llegar al resultado que queremos. Por último, en la quinta sesión repartiremos una serie de problemas similares a los realizados el primer día del taller. De esta forma,

comprobarán las ventajas de seguir un método para conseguir el objetivo que queremos, viendo la diferencia con los problemas realizados anteriormente.

4.3. Dinámica del aula

El alumnado del grupo de 4ºA se distribuye en 3 grupos de 4 o 5 alumnos y alumnas, cada uno de los cuales tiene una mesa de trabajo individual. El trabajo en pequeños grupos, al que están acostumbrados, permite a los estudiantes participar activamente y apoyarse los unos en los otros cuando les surgen problemas y dudas en su trabajo.

El aprendizaje cooperativo va a ser la metodología de trabajo que utilizaremos en la resolución de problemas, la cual se basa en la cooperación del alumnado, la responsabilidad que recae sobre cada miembro del grupo, la comunicación y el trabajo en equipo. Como profesores, nuestro papel será el de guía y supervisión del trabajo de cada grupo y el de sugerir modos de proceder u orientar en su tarea cuando lo necesiten. Esta metodología es muy positiva ya que da buenos resultados. Por ello, se considera adecuada para trabajar en este taller. En la primera y última sesión, la distribución de las mesa se modificará para que el alumnado trabaje de forma individual. En esos momentos, las mesas se colocan en filas, mirando cada una de ellas a la pizarra, para que el trabajo del alumno sea individual de manera que pueda reflexionar, deducir y escoger el método de resolución más apropiado en cada problema.

4.4. Recursos materiales

Serán necesarios los siguientes materiales:

- Proyector
- Ordenador
- Pizarra
- Hojas para el trabajo
- Bolígrafos de colores

4.5. Marco curricular

El taller de resolución de problemas que vamos a plantear se orienta a los niños y niñas de 4º curso de educación primaria. En él, el alumnado desarrollará los siguientes contenidos presentes en el currículum de educación primaria, dentro del área de matemáticas en 4º curso (p. 53).

- Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
 - Planificación del proceso de resolución de problemas
 - Análisis y comprensión del enunciado.
 - Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.
 - Resultados obtenidos
- Bloque 2: Números.
 - Números enteros, decimales y fracciones
 - Relación entre suma y resta, propiedad conmutativa y asociativa.
 - Utilización de los algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división de números decimales.

Por una parte, mediante la propia resolución de cualquier tipo de problema, se desarrollan los contenidos del bloque 1 referentes a los procesos, métodos y actitudes en matemáticas a la hora de enfrentarse al problema. Por otra parte, con los problemas que vamos a plantear, se desarrollarán también contenidos en función de los números (bloque 2) que utilicemos en el problema, siendo en este caso los números decimales y las fracciones, además de los números enteros. Del mismo modo, se trabaja la relación existente entre la suma y la resta a la hora de resolver algunos de los tipos de problemas de suma y resta mencionados anteriormente, así como la utilización de los algoritmos que ya domina el alumnado de 4º curso como son la multiplicación y la división en los problemas multiplicativos. Podremos adaptar de esta forma los algoritmos mencionados tanto en números decimales como en fracciones o números enteros.

4.6. Sesiones del taller

4.6.1. Sesión 1

Esta primera sesión del taller la vamos a utilizar como una especie de “evaluación inicial” en donde vamos a repartir una ficha (anexo I) con 5 problemas a resolver al alumnado en los 45 minutos de clase. El objetivo es que lo realicen de manera individual, sin los pequeños grupos de trabajo en los que trabajan diariamente, para que podamos ver la forma en la que resuelven los problemas teniendo así una muestra previa al comienzo del taller. Por esta razón, en esta sesión la disposición de las mesas cambiará para ponerlas en filas de una en una mirando hacia la pizarra.

Para la elección de estos problemas, atenderemos a dos aspectos que hemos visto anteriormente. Por un lado al currículum, en donde como hemos podido ver, en este 4º curso se desarrollan contenidos referentes a números decimales y fracciones, además de los enteros, por lo que estos serán los temas que incluiremos en estos problemas. Además, en este curso dominan los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división, los cuales también serán incluidos. El otro aspecto al que atenderemos son las situaciones mencionadas anteriormente tanto en los problemas de sumas y restas (ETE, ECE, TTT, CTC, CCC) como en los multiplicativos (ERE, ECE, EEE, CCC) tratando de trabajar en clase todas las situaciones posibles que se dan en un problema, donde E = Estado, T = Transformación, C = Comparación, R = Razón.

Del mismo modo, también intentaremos en la medida de lo posible proponer problemas con una temática que se ajuste lo máximo posible a los intereses y aficiones de los niños, buscando en ellos una mayor motivación y ganas a la hora de intentar resolverlos.

Así, de los cinco problemas que vamos a proponer para resolver al alumnado, en los dos primeros se utilizarán algoritmos de suma y resta para su resolución (el primero con números enteros y el segundo con números decimales), mientras que en los tres restantes se utilizarán algoritmos de multiplicación y división (además de poder contener también algoritmos de suma y resta). De estos tres restantes, el tercero de los cinco contendrá al menos un algoritmo de multiplicación con números enteros, el cuarto uno de división, con números enteros también, y el quinto tendrá algún número fraccionario en su resolución.

De esta manera, los problemas trabajados implican la utilización de los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división; además de trabajar en ellos números enteros, decimales y fraccionarios. La dificultad de estos cinco problemas es progresiva de menor a mayor, desde los primeros hasta los últimos, en función de los algoritmos necesarios para su resolución pasando de los algoritmos más sencillos como la suma y resta a los más complejos como la multiplicación y división. Además, en uno de ellos trabajamos los números decimales y en otro los fraccionarios, incluyendo del mismo modo los enteros.

- Problema 1: Suma y resta (situación EEE, ETE), números enteros.

Juan tiene dos colecciones de cómics. Una colección tiene 8 libros y la otra, 12. Pero de tanto leerlos con sus amigos se le han estropeado 7 libros. ¿Cuántos le quedan todavía sin estropear?

- Problema 2: Suma y resta (situación EEE, TTT), números decimales.

Mi padre me ha dado 2 euros y mi madre 1 euro al salir de casa. He gastado 1 euro y 10 céntimos en un refresco, 80 céntimos en un helado y 1 euro y 10 céntimos en una bolsa de patatas. ¿Cuánto dinero me sobrará?

- Problema 3: Multiplicación (situación ECE), suma (situación EEE), números enteros.

Mi primo tiene 16 cromos y yo el doble. ¿Cuántos cromos tenemos entre los dos?

- Problema 4: División (situación ERE), resta (situación ETE), números enteros.

En mi colegio hay 458 alumnos. ¿Cuántos autobuses harán falta para llevarlos a sus casas, si 290 vuelven andando y en cada autobús caben 42 personas?

- Problema 5: Número fraccionario.

Un camión llevaba 4.761 botellas de cristal de agua mineral. A causa de un accidente, se le rompieron la tercera parte de las botellas. ¿Cuántas botellas se le perdieron? ¿Cuántas quedan sin romperse?

4.6.2. Sesión 2

En esta segunda sesión es donde les explicaremos la importancia de seguir una serie de pasos a la hora de tratar de resolver un problema, así como el método de resolución de problemas que propone Pólya. Para hacer de esta explicación un aprendizaje más significativo, realizaremos algún ejemplo de

resolución de problemas paso a paso de forma detallada siguiendo las partes que componen este método al mismo tiempo que las explicamos. De este modo, les propondremos 4 pasos a seguir para resolver cualquier tipo de problema:

1. Entender el problema. Les enseñaremos a diferenciar los datos de un problema y a marcarlos con un color, mientras que la pregunta del problema se marca con otro. Por ejemplo, los datos del problema en azul y la pregunta en rojo. En esta primera fase podemos introducir también la representación gráfica como apoyo visual para entender el problema si fuera necesario.
2. Trazo de un plan de acción. Aquí deberán tener una idea global del problema y de qué tipo de relaciones existen entre las cantidades (tanto las que se conocen como las que se desconocen). De esta forma podrán deducir que tipo de operación u operaciones requiere la resolución del problema, ya sea suma, resta, multiplicación o división.
3. Ejecución del plan. Una vez visto el problema globalmente y sabidas las operaciones que se deben realizar, pasan a la práctica llevándolas a cabo.
4. Comprobación de resultados. Finalmente deben saber qué es lo que han hallado y si responde a la pregunta planteada. Se realiza además una comprobación del resultado realizando las operaciones inversas a las realizadas para ver si es correcta la operación.

A continuación, muestro dos problemas de ejemplo que podemos utilizar a la vez que realizamos esta explicación sobre los pasos a seguir en la resolución de problemas. En este caso, para que no sean iguales, podemos incluir uno en donde se tengan que utilizar los algoritmos de resta y multiplicación y otro en donde se utilizan los de suma y división por ejemplo.

- Problema de ejemplo 1: Con resta (situación ETE) y multiplicación (situación ERE).

7 amigos deciden comprar una caja que tenía 52 bombones. Al abrir la caja, se caen 8 bombones al suelo, que se tiran a la basura. De los que quedan, cada amigo come 5. ¿Cuántos bombones quedan en la caja?

Según los pasos del método de Pólya:

1. Coloreamos los datos y preguntas del problema.

7 amigos deciden comprar una caja que tenía *52 bombones*. Al abrir la caja, se *caen 8 bombones* al suelo, que se tiran a la basura. De los que quedan, *cada amigo come 5*. ¿*Cuántos bombones quedan en la caja?*

Podemos diseñar un dibujo como el siguiente formando un rectángulo de 7×5 (en donde hay 7 amigos y cada uno come 5 bombones) para que se vea de manera más clara que se trata de una multiplicación.



Imagen 1. Dibujo de bombones y amigos

2. Trazamos el plan de actuación. Pensamos en el primer montón de bombones, 52, y sabemos que, si se caen al suelo y se tiran a la basura 8, habrá que RESTAR para ver cuántos se pueden comer. Para calcular la cantidad de bombones que se comen, tenemos que pensar que, si todos comen 5 y hay 7 amigos, tendremos que MULTIPLICAR. Finalmente, cuando tengamos ese resultado, sabemos que son los bombones que se comen, por lo que tendremos que RESTAR estos bombones comidos a los que quedaban (después de los caídos al suelo), hallando de esta manera los que sobran.
3. Ejecutamos el plan.

$$52 - 8 = 44 \text{ bombones nos quedan en la caja antes de comer.}$$

$$7 \times 5 = 35 \text{ bombones se comen entre los 7 amigos.}$$

$$44 - 35 = 9 \text{ bombones sobran después de comer.}$$
4. Comprobamos que el resultado es correcto y que responde a la pregunta.
Sumamos los bombones comidos, los que sobran y los que se caen al suelo comprobar ver si en total había 52: $35 + 9 + 8 = 52$.

Dividimos los 35 bombones comidos entre los 7 amigos para comprobar que cada uno come 5: $35/7 = 5$.

Una vez realizado este problema de forma oral y siguiendo los pasos, les podemos preguntar a ver si se les ocurre alguna forma diferente de hacerlo y que cada alumno explique a sus compañeros la manera en la que lo abordaría, para que de este modo vean que no todos habían pensado lo mismo. En este caso, hemos restado al principio los bombones que se caían, pudiendo haber dejado este paso para el final. Incluso podríamos haber realizado al final del problema una suma entre los bombones que se caen al suelo y los que se comen, para después restar esa cantidad a los bombones que había en un principio llegando a la misma solución: los bombones que sobran. De esta manera el alumnado puede ver que, en ocasiones, no hay una única manera de abordar los problemas, sino que se puede llegar a la solución final a través de más de un camino en determinados problemas.

- Problema de ejemplo 2: Con suma (situación EEE) y división (situación ERE)

Tengo un total de 81 galletas con chocolate para repartirlas entre todo el alumnado de 4º. Como ya sabéis, en 4ºA sois 13 niños y niñas, mientras que la clase de 4ºB tiene 14 alumnos. ¿Cuántas galletas comeréis cada uno?

Según los pasos de Pólya:

1. Coloreamos los datos y pregunta del problema.

Tengo un total de 81 galletas con chocolate para repartirlas entre todo el alumnado de 4º. Como ya sabéis, en 4ºA sois 13 niños y niñas, mientras que 4ºB tiene 14 alumnos. ¿Cuántas galletas comeréis cada uno?

Al igual que en el problema anterior, podemos realizar un dibujo para ayudarnos a entender mejor el problema o ver qué tipo de situación se da en él, en este caso de división. En este caso podemos dibujar por un lado las 81 galletas (9 filas de 9) y por otro los 27 (una fila de 13 de 4ºA y otra de 14 de 4ºB) alumnos que tenemos en clase. Así, al ver que hay que repartir un montón grande (galletas) en otro más pequeño (niños y niñas), sabemos que tenemos que dividir.

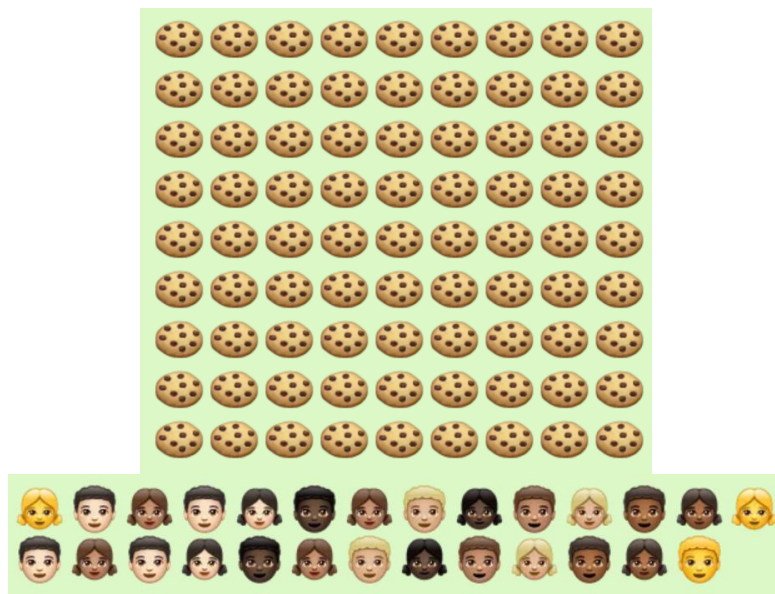


Imagen 2. Dibujo de galletas y alumnado de la clase

2. Trazamos un plan de actuación. A los alumnos de 4ºA se le añaden los de 4ºB para repartir galletas. Por tanto, habrá que SUMAR el alumnado de cada clase. Una vez tenemos el número total de niños y niñas en 4º, si tenemos que repartir 81 galletas entre todos, tendremos que DIVIDIR para saber cuántas come a cada uno.

3. Ejecutamos el plan.

$13 + 14 = 27$ niños y niñas en total en 4º.

$81/27 = 3$ galletas come cada niño.

4. Comprobamos que el resultado es correcto y que responde a la pregunta.

Restamos los niños que hay en total menos los de una de las dos clases para comprobar que hemos hecho bien la suma: $27 - 14 = 13$.

Multiplicamos el número total de niños por las galletas que come cada uno para comprobar que teníamos 81 en un principio: $27 \times 3 = 81$.

Una vez han aprendido el método de resolución de problemas que hemos propuesto, lo practicaremos durante las sesiones 3 y 4 para consolidar este aprendizaje e ir mejorándolo.

4.6.3. Sesión 3

Durante esta tercera sesión y la siguiente, los niños tratarán de practicar el método de resolución de problemas de Pólya que les hemos enseñado en los

pequeños grupos de trabajo de 4 – 5 personas a los que están habituados. En este caso, al contrario que en la primera sesión, estaremos a su disposición para ayudarles si lo necesitan, además del apoyo mutuo que les proporciona el trabajar en grupos pequeños fomentando de esta manera un aprendizaje cooperativo. El objetivo de estas sesiones es que utilicen el método y vean las ventajas que les ofrece a la hora de resolver el problema.

Durante esta sesión, nos centraremos en los problemas de sumas y restas, tanto de números enteros como decimales, donde propondremos problemas para resolver en una nueva ficha (anexo II). Aquí, trataremos de enseñarles todas las posibles situaciones que se pueden dar en los problemas de suma y resta vistos anteriormente, donde E= Estado, T= Transformación y C= Comparación.

- Problema 1: Situación EEE, números enteros.

Mi libro de cuentos tiene 84 páginas. Ayer leí 12 páginas y hoy 17 ¿cuántas me quedan por leer?

- Problema 2: Situación ETE, números enteros.

En un autobús iban 12 viajeros. En la primera parada han subido 7 viajeros y han bajado 5. ¿Cuántos viajeros quedan ahora en el autobús?

- Problema 3: Situación ECE, números enteros.

Una colección de cromos de fútbol consta de 75 cromos. Si tiene 46 cromos más que la colección de cromos de superhéroes, ¿cuántos cromos tiene la colección de superhéroes?

- Problema 4: Situación TTT, números decimales.

Andrés compró una bicicleta nueva por 259,95 euros. La ha vendido por 145,50 euros a una tienda de bicicletas. ¿Ha ganado o perdido dinero? ¿Cuánto?

- Problema 5: Situación CTC, números decimales.

Ana tiene 5,75 euros menos que Juan. A Juan le dan sus padres 3 euros y se encuentra 50 céntimos en el ascensor al bajar al parque. ¿Quién tiene ahora más dinero? ¿Cuánto más?

- Problema 6: Situación CCC, números decimales.

Mi hermana ha comprado tres libros. Uno pesa 220,5 gramos, otro 25,5 más que el anterior y el tercero, 230 gramos. ¿Cuánto les falta a los tres juntos para llegar a mil gramos?

4.6.4. Sesión 4

La dinámica de esta cuarta sesión será la misma que empleamos en la anterior, donde el alumnado seguirá trabajando con nuestra ayuda y supervisión, además de hacerlo en grupo en los problemas que tienen que resolver siguiendo los pases del método de Pólya con otra ficha (anexo III).

Sin embargo, si bien en la anterior sesión trabajamos en los problemas de suma y resta, en esta profundizaremos en los problemas de multiplicación y división, tanto con números enteros como fraccionarios. En este caso, también trabajaremos en los problemas todas las situaciones que se dan en los problemas multiplicativos vistos anteriormente, en donde E = Estado, R = Razón y C = Comparación.

- Problema 1: Situación ERE, multiplicación.

Un tren que circulaba a 89 Km. por hora ha estado andando durante 4 horas. ¿Cuánto Km ha recorrido en total?

- Problema 2: Situación ECE, multiplicación.

Alfredo tiene un coche que vale 1.500 euros. El coche de sus padres vale 6 veces más que el suyo. ¿Cuánto dinero vale el coche de sus padres?

- Problema 3: Situación EEE, división.

En una clase de este colegio hay 30 mesas, las cuales están dispuestas en filas de 5 mesas cada una. ¿Cuántas filas de mesas habrá en la clase?

- Problema 4: Situación CCC, división.

Un país tiene 44 millones de habitantes. La mitad de ellos son mujeres. De ellas, la mitad son menores de 45 años. ¿Cuántas mujeres menores de 45 años hay en dicho país?

- Problema 5: Números fraccionarios.

Gabriel debe a un amigo 250 euros. Si le paga los $\frac{2}{5}$ de la deuda, ¿cuántos euros le quedan por pagar?

- Problema 6: Números fraccionarios.

Para comprar una tarta entrego un billete de 50 euros. ¿Cuántos euros me devolverán si la tarta vale $\frac{1}{5}$ del billete?

4.6.5. Sesión 5

Esta quinta y última sesión del taller la utilizaremos a modo de “evaluación final”, en donde repartiremos una última ficha (anexo IV) con 5 problemas para

resolver en los 45 minutos que dura la sesión. Al igual que en la primera sesión, la disposición de la clase cambia de los grupos de trabajo cooperativos a las filas de mesas de una en una mirando hacia la pizarra para el trabajo individual. El objetivo de esta sesión es comprobar si el alumnado resuelve los problemas con el método que les hemos enseñado y que ellos mismos puedan comprobar las ventajas que esto les proporciona.

Para ello, la selección de los cinco problemas que propondremos aquí será similar a la que hicimos en la primera sesión, siendo los dos primeros de suma y resta (el primero con números enteros y el segundo con decimales), y los demás con situaciones multiplicativas pudiendo tener también alguna situación de suma o resta. De estos últimos, de nuevo el tercero contendrá un algoritmo de multiplicación en su resolución, el cuarto otro de división y el último un número fraccionario. De esta manera, al igual que en la primera sesión, los problemas van en una progresión de dificultad de menor a mayor en función de los algoritmos a utilizar en su resolución, pasando de los más sencillos (suma, resta) a los más complejos (multiplicación, división pudiendo incluir además suma, resta).

- Problema 1: Suma y resta (situación EEE), números enteros.

En una huerta hay árboles frutales de tres clases: 148 ciruelos, 353 melocotoneros y los demás son perales. Si en total hay 600 árboles, ¿cuántos perales hay?

- Problema 2: Suma y resta (situación EEE, ETE), números decimales.

He comprado una revista para mi padre por 1 euro y 23 céntimos, una barra de pan por 50 céntimos y me he gastado 5 céntimos en un chicle. Si llevaba una moneda de 2 € ¿Cuánto me devolverán?

- Problema 3: Multiplicación (situación ERE), suma (situación EEE), números enteros.

Un pastelero tiene 57 bizcochos de nata, 48 de chocolate y 39 de crema para venderlos a 6 € cada uno. ¿Cuánto dinero obtendrá si los vende todos?

- Problema 4: División (situación CCC), números enteros.

¿Cuántas semanas son 1.344 horas?

- Problema 5: Números fraccionarios.

Una película dura 1 hora y media. Si han pasado $\frac{4}{5}$ de la misma ¿Cuántos minutos faltan para terminar dicha película?

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

A lo largo de todo el trabajo, se han analizado diferentes puntos de vista acerca de las matemáticas y más concretamente de la resolución de problemas. Con ello, se ha cumplido uno de los objetivos específicos iniciales, como es el de *revisar el concepto de problema y tipología de los mismos según diferentes autores*. De esta forma se han expuesto en el trabajo las características que tienen los problemas matemáticos y sus diferencias con otras actividades del área de matemáticas, como son los ejercicios por ejemplo, con mecánicas muy distintas. Del mismo modo, se han analizado los distintos tipos de problemas que se pueden presentar a lo largo de la educación primaria y las situaciones que se dan en estos problemas, en las que me he basado para la propuesta de intervención a realizar en un grupo concreto de cuarto curso de educación primaria.

También se han podido cumplir los objetivos específicos de *identificar los métodos que son más eficaces en la resolución de problemas*, y por consiguiente el de *conocer estrategias generales de resolución que contribuyan a resolver con éxito las situaciones planteadas*. Así, se ha podido comprobar la enorme importancia que tiene desarrollar una estrategia y un modo de resolver los problemas, lo que facilita en cierto modo la realización de esta actividad. Aunque en el marco teórico se exponen una variedad de modelos a seguir para resolver problemas según distintos autores, lo cierto es que muchos son similares, cambiando algún pequeño matiz entre ellos ya que los pasos a seguir tienen una finalidad común. En este caso, en el taller de resolución de problemas planteado se ha optado por el modelo que propone Pólya, por ser el más representativo de todos los que se han visto y en el que se han basado muchos de los autores mencionados en el trabajo.

Mediante la propuesta de intervención realizada, se ha podido cumplir con el cuarto y último objetivo específico de *dotar de estrategias al alumnado para la comprensión y posterior resolución de los problemas*. El taller de problemas que se ha presentado anteriormente trata de enseñar al alumnado al que va dirigido una estrategia a seguir a la hora de resolver un problema, con la finalidad de que el alumnado encuentre menos dificultades en su camino de llegar a la solución del mismo.

Todos estos objetivos específicos mencionados conducen al objetivo general del trabajo, el de *analizar e intentar mejorar las actuaciones de los alumnos frente a la resolución de problemas matemáticos*. Lamentablemente no ha sido posible llegar a este objetivo ya que la propuesta de intervención no se ha podido llevar a la práctica, debido al cierre de los centros educativos que hemos experimentado por la situación excepcional en la que nos encontramos actualmente.

Igualmente, aunque la pequeña investigación realizada a lo largo del trabajo puede responder de forma teórica a algunas de las cuestiones planteadas al inicio del mismo, no quedan resueltas completamente, pues se esperaba poder darles un sentido con la puesta en práctica del taller de resolución de problemas propuesto anteriormente. Las cuestiones son las siguientes, con sus correspondientes respuestas teóricas, las cuales se pueden intuir a partir de la investigación realizada.

- *¿Influye la motivación en el alumnado a la hora de resolver los problemas matemáticos?*

Tras analizar en profundidad las estrategias de resolución de problemas, se puede apreciar la importancia de la motivación y la curiosidad en los estudiantes durante esta actividad, por lo que podríamos decir que sí, que la motivación influye a la hora de resolver problemas matemáticos. El docente debe ofrecerles una gran variedad de situaciones y tipos de problemas, además de tratar de acercarse a sus gustos personales o intereses, haciendo que de esta manera su motivación a la hora de hallar la solución del problema sea mayor y tengan más interés en la actividad. Esto es algo que se ha procurado llevar a cabo en la formulación de los problemas planteados en el taller, tratando temas que pueden resultar de interés al alumnado.

- *¿Existen dificultades de comprensión de los problemas que impiden buscar adecuadamente la solución del mismo?*

Para la búsqueda adecuada de la solución de un problema, muchos autores dan una gran relevancia a la correcta comprensión del problema, dentro de los pasos que proponen para resolverlos. De esta manera, defienden la importancia de saber exactamente lo que se pide, diferenciando los datos que el problema nos aporta y las incógnitas que se deben resolver para llegar a la solución. Para ello, se proponen actividades como la ilustración de la situación

planteada mediante un dibujo o gráfico, separar datos de incógnitas o enunciar el problema con otras palabras. Estas estrategias nos hacen pensar que sí, que pueden existir dificultades de comprensión en los problemas a la hora de resolverlos, aunque no se ha podido comprobar con certeza ya que no ha sido posible la puesta en práctica del taller de problemas.

- *¿Existen incoherencias en las respuestas a los problemas y bloqueos en el proceso de resolución?*

Una vez se llega a la solución del problema, algunos autores como Pólya nos indican que se debe comprobar la respuesta y además darle un sentido, pues como se señala en el apartado de *material y metodología*, se pueden dar diversos casos al llegar a la solución. Puede ocurrir que el alumno considere terminado el problema sin que escriba la respuesta a la pregunta planteada, que escriba únicamente el valor numérico sin especificar de qué se trata o incluso que no se extraña ante una respuesta aparentemente absurda sin realizar una comprobación de las operaciones realizadas. Sin embargo, esta cuestión, al igual que la anterior, se esperaba poder resolver mejor en los problemas planteados en el taller de forma práctica, así como el poder comprobar si existen bloqueos en el proceso de resolución por parte del alumnado.

- *¿Qué ocurre cuando el problema implica realizar una operación que el alumnado no domina algorítmicamente?*

Como se ha visto en el apartado de *concepto de resolución de problemas* de este trabajo, si el problema que se plantea a un alumno es muy difícil en comparación con su formación matemática y no domina por ejemplo alguna operación matemática o algoritmo, o bien en qué situación debe utilizarla, puede verse frustrado en esta actividad y abandonarla sin resolverla. Por tanto, podemos intuir que, cuando un problema implica realizar una operación que el alumnado no domina algorítmicamente, puede ocurrir que el resolutor cese en su intento de resolverlo y abandone la actividad, según la teoría analizada.

- *¿Qué tipo de estrategias resultan más eficaces en el proceso de resolución de problemas?*

Tras los modelos de resolución vistos por los diferentes autores a lo largo del trabajo, se opta por el modelo de Pólya. Como he mencionado anteriormente, se señala como el más representativo de todos y a la vez la base de muchos

otros modelos, por lo que se considera de esta manera la estrategia más eficaz en el proceso de resolución de problemas.

Sin embargo, aunque hemos podido encontrar respuestas teóricas, en mayor o menor medida, a las cuestiones planteadas a partir del análisis realizado durante el trabajo, quedan abiertas a expensas de poder llevar a la práctica la propuesta de intervención.

Para finalizar, me gustaría añadir una pequeña reflexión como alumno futuro docente, en relación a los contenidos y materia que se han tratado a lo largo de todo este trabajo de fin de grado. Pienso firmemente que, como docentes, debemos estar siempre en constante innovación y creación, con innumerables inquietudes acerca del todo lo que concierne al mundo escolar. En el caso del área de las matemáticas, las cuales son amadas por algunos alumnos y odiadas por otros muchos, nuestra labor es que el alumnado se sienta atraído, tenga curiosidad y que incluso desarrolle un gusto por ellas. Para ello, debemos tener especial cuidado en la manera en las enseñamos, pues hemos visto que el no saber cómo resolver un problema o realizar un ejercicio puede llevar a la frustración del alumnado y por consiguiente a no tener interés en esta materia. Así, tenemos que buscar diferentes métodos de enseñanza y metodologías para ayudar al alumnado a desarrollar al máximo sus capacidades y habilidades, y saber proponer siempre nuevas metodologías de enseñanza, es decir, tener un plan *B* o incluso *C* para cuando el plan *A* no funciona como esperábamos, algo que es muy probable que pueda ocurrir en un aula. Centrándonos más en la resolución de problemas dentro de las matemáticas, es importante que sepamos siempre ofrecer al alumnado problemas con diversos formatos, situaciones y cuestiones que hagan de esta actividad algo innovador y no repetitivo, que mantenga la motivación del alumnado alta y que desarrolle en ellos un gusto por resolver y una satisfacción personal y sentimiento de logro cuando esto sucede. Para ello, es esencial el papel del docente y la vocación en su trabajo con los niños, algo que se sobreentiende como crucial para alcanzar los objetivos mencionados. De esta manera, se podrá conseguir que el alumnado adquiera las competencias matemáticas que señala el currículo de educación primaria, al mismo tiempo que disfruta de la actividad de resolución de problemas y en general de la asignatura de las matemáticas.

REFERENCIAS

- Arce, M., Conejo, L., Muñoz, J.M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis, 5-36.
- Cascante, C. (2009) *Aprendizaje cooperativo*. Laboratorio de Innovación educativa.
- DECRETO FORAL 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación primaria en la Comunidad Foral de Navarra.
- Díaz, J.A., Díaz, R. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Bolema*, 32 (60), 57-74.
- Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas*. Pamplona: Castuera.
- García, R., Traver, J. A., Candela, I. (2012). *Aprendizaje cooperativo*. Madrid: CCS.
- Godino, J. D. (Director) (2004). *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (Recuperable en, <http://www.ugr.es/local/jgodino/>)
- Pérez, Y., Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, 35 (73), 169-194.
- Poggioli, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas*. Serie enseñando a aprender. Caracas: Fundación Empresas Polar.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Velasco, R. (2010). Temas para la educación. *Revista digital para los profesionales de la enseñanza*, (6).

ANEXOS

Anexo I

FICHA DE PROBLEMAS INICIAL

NOMBRE: _____

FECHA: _____

1. Juan tiene dos colecciones de cómics. Una colección tiene 8 libros y la otra, 12. Pero de tanto leerlos con sus amigos se le han estropeado 7 libros. ¿Cuántos le quedan todavía sin estropear?

2. Mi padre me ha dado 2 euros y mi madre 1 euro al salir de casa. He gastado 1 euro y 10 céntimos en un refresco, 80 céntimos en un helado y 1 euro y 10 céntimos en una bolsa de patatas. ¿Cuánto dinero me sobrará?

3. Mi primo tiene 16 cromos y yo el doble. ¿Cuántos cromos tenemos entre los dos?

4. En mi colegio hay 458 alumnos. ¿Cuántos autobuses harán falta para llevarlos a sus casas, si 290 vuelven andando y en cada autobús caben 42 personas?

5. Un camión llevaba 4.761 botellas de cristal de agua mineral. A causa de un accidente, se le rompieron la tercera parte de las botellas. ¿Cuántas botellas se le perdieron? ¿Cuántas quedan sin romperse?

Anexo II**PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA SIGUIENDO EL MODELO DE PÓLYA**

1. Mi libro de cuentos tiene 84 páginas. Ayer leí 12 páginas y hoy 17 ¿cuántas me quedan por leer?

2. En un autobús iban 12 viajeros. En la primera parada han subido 7 viajeros y han bajado 5. ¿Cuántos viajeros quedan ahora en el autobús?

3. Una colección de cromos de fútbol consta de 75 cromos. Si tiene 46 cromos más que la colección de cromos de superhéroes, ¿cuántos cromos tiene la colección de superhéroes?

4. Andrés compró una bicicleta nueva por 259,95 euros. La ha vendido por 145, 50 euros a una tienda de bicicletas. ¿Ha ganado o perdido dinero? ¿Cuánto?

5. Ana tiene 5,75 euros menos que Juan. A Juan le dan sus padres 3 euros y se encuentra 50 céntimos en el ascensor al bajar al parque. ¿Quién tiene ahora más dinero? ¿Cuánto más?

6. Mi hermana ha comprado tres libros. Uno pesa 220,5 gramos, otro 25,5 más que el anterior y el tercero, 230 gramos. ¿Cuánto les falta a los tres juntos para llegar a mil gramos?

Anexo III**PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN SIGUIENDO EL MODELO DE PÓLYA**

1. Un tren que circulaba a 89 Km. por hora ha estado andando durante 4 horas. ¿Cuánto Km ha recorrido en total?

2. Alfredo tiene un coche que vale 1.500 euros. El coche de sus padres vale 6 veces más que el suyo. ¿Cuánto dinero vale el coche de sus padres?

3. En una clase de este colegio hay 30 mesas, las cuales están dispuestas en filas de 5 mesas cada una. ¿Cuántas filas de mesas habrá en la clase?

4. Un país tiene 44 millones de habitantes. La mitad de ellos son mujeres. De ellas, la mitad son menores de 45 años. ¿Cuántas mujeres menores de 45 años hay en dicho país?

5. Gabriel debe a un amigo 250 euros. Si le paga los $\frac{2}{5}$ de la deuda, ¿cuántos euros le quedan por pagar?

6. Para comprar una tarta entrego un billete de 50 euros. ¿Cuántos euros me devolverán si la tarta vale $\frac{1}{5}$ del billete?

Anexo IVFICHA DE PROBLEMAS FINAL

NOMBRE: _____

FECHA: _____

1. En una huerta hay árboles frutales de tres clases: 148 ciruelos, 353 melocotoneros y los demás son perales. Si en total hay 600 árboles, ¿cuántos perales hay?

2. He comprado una revista para mi padre por 1 euro y 23 céntimos, una barra de pan por 50 céntimos y me he gastado 5 céntimos en un chicle. Si llevaba una moneda de 2 € ¿Cuánto me devolverán?

3. Un pastelero tiene 57 bizcochos de nata, 48 de chocolate y 39 de crema para venderlos a 6 € cada uno. ¿Cuánto dinero obtendrá si los vende todos?

4. ¿Cuántas semanas son 1.344 horas?

5. Una película dura 1 hora y media. Si han pasado $\frac{4}{5}$ de la misma ¿Cuántos minutos faltan para terminar dicha película?